



UNIVERSITÀ DELLA
VALLE D'AOSTA
UNIVERSITÉ DE LA
VALLÉE D'AOSTE

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN ECONOMIA E MANAGEMENT

ANNO ACCADEMICO 2025/2026

TESI DI LAUREA

“Portafogli finanziari e avversione alle perdite nella Prospect Theory”

Relatore: Prof.ssa Braga Maria Debora

Tommaso Mondini
Matricola: 23C06065

Ringraziamenti

Desidero esprimere la mia più sincera gratitudine alla Professoressa Maria Debora Braga, relatrice di questa tesi, per la disponibilità, la competenza e la costante attenzione con cui ha seguito il mio lavoro. La ringrazio per i preziosi suggerimenti, per il fondamentale supporto nella ricerca della letteratura scientifica e nella costruzione del modello di ottimizzazione, nonché per gli stimoli e le riflessioni che hanno accompagnato ogni fase dello sviluppo di questo elaborato.

Le sono inoltre profondamente riconoscente per la fiducia accordatami, per il tempo dedicato e per la professionalità dimostrata in ogni momento. La sua disponibilità ha reso questa esperienza non solo estremamente formativa dal punto di vista accademico, ma anche un'importante occasione di crescita personale.

Sommario	
Introduzione	3
I. Teoria di Markowitz	6
I.I Frontiera efficiente e algoritmo di ottimizzazione	6
I.II Funzione di utilità e forme di deviazione dalla normalità	9
II. Prospect Theory e Avversione alle Perdite	14
II.I Funzione del valore	17
II.II Bias cognitivi e Avversione alle Perdite	20
III. Differenti concezioni di Rischio	27
III.I Rischio secondo Modern Portfolio Theory di Harry Markowitz	27
III.II Rischio secondo considerazione dell'investitore	30
III.II.I Downside Risk	32
III.II.II Drawdown	36
IV. Costruzione Portafoglio Finanziario	40
IV.I Modello di ottimizzazione basato sul drawdown	41
IV.I.I Formulazione matematica del modello	44
IV.II Modello di ottimizzazione di Markowitz	45
IV.III Definizione Dataset	47
IV.IV Implementazione empirica e descrizione dei modelli di ottimizzazione	50
IV.IV.I Implementazione caratteristiche modello basato sul drawdown	51
IV.IV.II Implementazione caratteristiche modello di Markowitz	55
IV.V Confronto dei risultati dei due modelli di ottimizzazione	59
IV.VI Valutazione risultati del modello: punti di forza e limiti	65
Conclusioni	68
Bibliografia	71

Introduzione

Nel corso degli ultimi decenni la teoria finanziaria tradizionale ha rappresentato il principale punto di riferimento per l'analisi delle decisioni di investimento e per la costruzione dei portafogli finanziari.

Modelli come la *Modern Portfolio Theory* (MPT), teoria del portafoglio di Harry Markowitz, hanno contribuito in maniera determinante allo sviluppo della finanza moderna, introducendo pilastri fondamentali quali la razionalità degli investitori, l'ottimizzazione media varianza e i benefici generati dalla diversificazione.

In linea con tali approcci, gli investitori vengono rappresentati come soggetti razionali, dunque in grado di prendere decisioni ottimali sulla base di un *trade-off* rischio-rendimento: selezionando per ogni livello di rendimento atteso il portafoglio con minima varianza (o, più pragmaticamente, con minima deviazione standard), costituendo così la frontiera efficiente di Markowitz.

Ciò nonostante, numerose evidenze empiriche e studi scientifici hanno progressivamente messo in luce come il comportamento reale degli investitori si discosti frequentemente dalle ipotesi formulate dalla finanza tradizionale, mettendo in discussione in particolare la razionalità degli individui. L'osservazione dei mercati finanziari ha infatti mostrato come gli investitori non assumano sempre comportamenti pienamente razionali: fattori psicologici, emotivi, cognitivi e *bias* comportamentali influenzano le decisioni finanziarie portandoli a compiere scelte spesso irrazionali o in controtendenza con la teoria formulata dai modelli tradizionali.

Fenomeni come il *panic selling* durante le crisi finanziarie, l'*overconfidence* e l'eccessiva avversione alle perdite rappresentano evidenze che difficilmente possono essere spiegate esclusivamente attraverso il paradigma della razionalità perfetta.

In questo quadro si sviluppa la finanza comportamentale, disciplina che assimila economia, psicologia e teoria delle decisioni con la finalità di comprendere i meccanismi che influenzano il comportamento degli investitori nei mercati finanziari. Tra i contributi scientifici più rilevanti di questo filone teorico vi è la *Prospect Theory* di Daniel Kahneman e Amos Tversky. Tale teoria si pone in contrasto con la *Modern Portfolio Theory* di Markowitz, mettendo in discussione la piena razionalità degli individui, nello specifico sostenendo che essi valutino i risultati rispetto ad un punto di riferimento soggettivo invece che in termini assoluti e, che percepiscano le perdite con un'intensità psicologica maggiore rispetto ai guadagni di pari entità, fenomeno noto come avversione alle perdite (*loss aversion*).

L'avversione alle perdite assume un ruolo particolarmente importante nelle decisioni di investimento e nella costruzione dei portafogli finanziari. La *Prospect Theory* ha avuto un impatto significativo nella pratica finanziaria e nella gestione del rischio, poiché consente di comprendere perché molti investitori attribuiscono maggiore importanza alla possibilità di subire perdite, piuttosto che all'opportunità di ottenere rendimenti elevati. Tale comportamento emerge con particolare rilevanza nelle fasi di forte volatilità dei mercati, durante le quali il timore di perdite consistenti può indurre gli investitori a modificare drasticamente le proprie strategie di investimento, smobilizzando determinati asset più volatili o in fase di momentanea discesa.

Sebbene la teoria finanziaria tradizionale tenda a misurare il rischio prevalentemente attraverso la volatilità dei rendimenti, nella pratica molti investitori percepiscono il rischio soprattutto in termini di perdita effettiva del capitale investito.

Per questo motivo ha assunto crescente rilevanza il concetto di *drawdown*, un indicatore di rischio finanziario che evidenzia la diminuzione del valore di un investimento rispetto al suo precedente massimo, rappresentando una misura particolarmente efficace per analizzare sia la componente psicologica del rischio sia il modo in cui gli individui reagiscono alle fasi negative del mercato.

Se la teoria di Markowitz si fonda sull'idea che gli investitori siano interessati principalmente alla relazione tra rendimento atteso e volatilità, gli approcci comportamentali evidenziano invece come gli individui tendano a focalizzarsi sulle perdite potenziali e sulle conseguenze emotive associate a tali perdite. Questo porta alla necessità di sviluppare strategie di investimento che non considerino esclusivamente l'efficienza quantitativa del portafoglio, bensì anche la sostenibilità psicologica delle decisioni finanziarie.

L'obiettivo della presente tesi è quello di analizzare i principali fondamenti della finanza comportamentale, soffermandosi in particolare sul tema dell'avversione alle perdite e sui comportamenti assunti dagli investitori nelle fasi negative dei mercati finanziari. L'elaborato intende inoltre evidenziare l'importanza di considerare differenti metriche ed indicatori rispetto al classico utilizzo della volatilità nella moderna costruzione dei portafogli, mettendo in luce le differenze di queste metodologie rispetto all'approccio tradizionale della teoria del portafoglio di Harry Markowitz. Verranno quindi approfonditi i limiti dei modelli classici nel descrivere il comportamento reale degli investitori e il contributo della finanza comportamentale nella moderna considerazione del rischio.

Nel primo capitolo verranno ripresi i principi cardine della *Modern Portfolio Theory* di Markowitz, nello specifico il modello di ottimizzazione media varianza, con la conseguente costruzione della frontiera efficiente e la funzione di utilità dell'investitore secondo Markowitz, mettendo in luce anche una delle principali ipotesi semplificatrici su cui si fonda il modello, quella della distribuzione normale dei rendimenti.

Nel secondo capitolo verranno illustrati i principi cardine della *Prospect Theory*, con particolare attenzione al fenomeno della *loss aversion* e al comportamento degli investitori in determinate fasi di mercato, tramite l'analisi di differenti casi esemplificativi. Successivamente, nel terzo capitolo, verrà approfondita la differente concezione di rischio tra quella proposta nel modello di Markowitz e alcune alternative analizzate, più affini alla reale percezione dell'investitore. La parte centrale della tesi sarà dedicata al confronto in termini di costruzione di portafoglio tra l'ottimizzazione proposta nella teoria di Markowitz e quella ottenuta attraverso un algoritmo di ottimizzazione basato su una formulazione semplificata del *maximum drawdown*, una metodologia di costruzione del portafoglio più coerente con l'emotività e l'avversione alle perdite dell'investitore, evidenziando in seguito differenze, vantaggi e limiti di ciascun modello. Nelle conclusioni verranno sintetizzati i principali risultati emersi dall'analisi, evidenziando il ruolo crescente della componente psicologica nelle decisioni di investimento e nella gestione del rischio finanziario.

L'importanza di tali tematiche risulta particolarmente evidente nell'attuale contesto economico caratterizzato da elevata volatilità, frequenti crisi sistemiche e crescente partecipazione degli investitori *retail* ai mercati.

Comprendere il modo in cui gli individui percepiscono il rischio e reagiscono alle perdite rappresenta oggi un elemento fondamentale non solo dal punto di vista teorico, ma anche nella costruzione dei portafogli e nella gestione effettiva degli investimenti finanziari.

I. Teoria di Markowitz

La teoria del portafoglio elaborata da *Harry Markowitz* negli anni Cinquanta rappresenta uno dei contributi fondamentali della finanza moderna e costituisce il punto di partenza per lo sviluppo dei successivi modelli di gestione degli investimenti. Attraverso il celebre articolo “*Portfolio Selection*” del 1952, Markowitz ha introdotto un approccio quantitativo alla costruzione del portafoglio finanziario, superando la concezione tradizionale secondo cui gli investitori avrebbero dovuto valutare i singoli titoli separatamente. L’autore ha proposto una visione differente, quella complessiva del portafoglio, evidenziando come la scelta ottimale di investimento dipenda non soltanto dalle caratteristiche delle singole asset class, bensì anche dalle relazioni esistenti tra esse.

Ad Harry Markowitz si attribuiscono principalmente due importanti contributi: l’introduzione del principio di diversificazione nella costruzione dei portafogli finanziari e la rappresentazione dell’investitore come soggetto che prende decisioni considerando simultaneamente il rendimento atteso e la varianza dei rendimenti (o la deviazione standard, quindi volatilità, dei rendimenti). In tale prospettiva, il processo decisionale dell’investitore si sviluppa all’interno di uno spazio bidimensionale, nel quale il rendimento atteso deve essere valutato congiuntamente al livello di rischio associato all’investimento.

Markowitz formalizza il principio di diversificazione attraverso i concetti statistici di covarianza e correlazione tra i differenti asset.

Verrà approfondita in seguito, nel terzo capitolo, la concezione di rischio elaborata da Markowitz, secondo cui il rischio di un portafoglio non può essere interpretato come la semplice somma dei rischi associati alle singole attività finanziarie, ma dipende anche dal grado di correlazione esistente tra i loro rendimenti. In particolare, la combinazione di attività caratterizzate da correlazioni basse o negative consente di ridurre il rischio complessivo del portafoglio senza necessariamente diminuire il rendimento atteso.

I.I Frontiera efficiente e algoritmo di ottimizzazione

Partendo dalle considerazioni precedentemente descritte, Markowitz supera l’idea tradizionale dell’investitore esclusivamente orientato alla massimizzazione del rendimento atteso ed elabora una concezione più articolata del comportamento finanziario. L’individuo viene descritto come un soggetto interessato simultaneamente alla massimizzazione del rendimento atteso e alla

minimizzazione della varianza dei rendimenti. Da questa impostazione deriva il criterio decisionale noto come modello media-varianza, secondo cui la scelta ottimale di investimento nasce dal bilanciamento tra il livello minimo di rischio dato un livello di rendimento atteso e viceversa.

Secondo questa visione, un investitore sceglierebbe nel set dei portafogli fattibili, per ogni livello di rendimento atteso, il portafoglio con la minima varianza; definendo così il concetto di *frontiera efficiente* come l'insieme dei portafogli che garantiscono il massimo rendimento possibile per un determinato livello di rischio, oppure il minimo rischio per un dato rendimento atteso.

La teoria si inserisce nel paradigma economico neoclassico, fondato sull'ipotesi che gli individui siano perfettamente razionali, in grado di elaborare tutte le informazioni disponibili e di assumere decisioni coerenti e orientate all'ottimizzazione.

Una volta definiti la considerazione dell'investitore ed i parametri che consentono di descrivere univocamente e congiuntamente la dinamica dei mercati finanziari secondo Marowitz, è necessario definire il modello che, prendendo in considerazione tutti i parametri, vincoli e obiettivi contemporaneamente, suggerisca i pesi più opportuni per il raggiungimento di un obiettivo considerabile razionale per l'individuo.

In generale, un algoritmo di ottimizzazione richiede tre componenti basilari:

- una funzione obiettivo, cioè un'espressione matematica che si desidera ottimizzare, ossia una formula che deve essere messa nelle condizioni, alternativamente, di restituire il minimo risultato possibile oppure il massimo valore possibile (dunque funzione obiettivo da minimizzare o da massimizzare);
- un set di variabili decisionali, le incognite dell'algoritmo da ottimizzare, dalle quali dipenderà, al termine dell'ottimizzazione, il valore della funzione obiettivo; costituiscono dunque gli output finali del modello;
- un set di vincoli possibili, ossia di restrizioni, a cui l'algoritmo, nella ricerca degli output e, dunque nella ricerca dei valori da assegnare al set di variabili decisionali, deve sottostare.

Nella classica formulazione della *Mean Variance Optimization* di Harry Markowitz sono dunque definibili le tre componenti appena descritte.

Il modello di ottimizzazione si pone l'obiettivo di minimizzare la funzione obiettivo rappresentata dalla formula di calcolo del rischio di portafoglio. L'algoritmo di Markowitz mira dunque alla minimizzazione del rischio complessivo associato ad un portafoglio.

Il set di variabili decisionali è costituito dai pesi che andrebbero raccomandati per le asset class al fine di minimizzare il rischio di portafoglio.

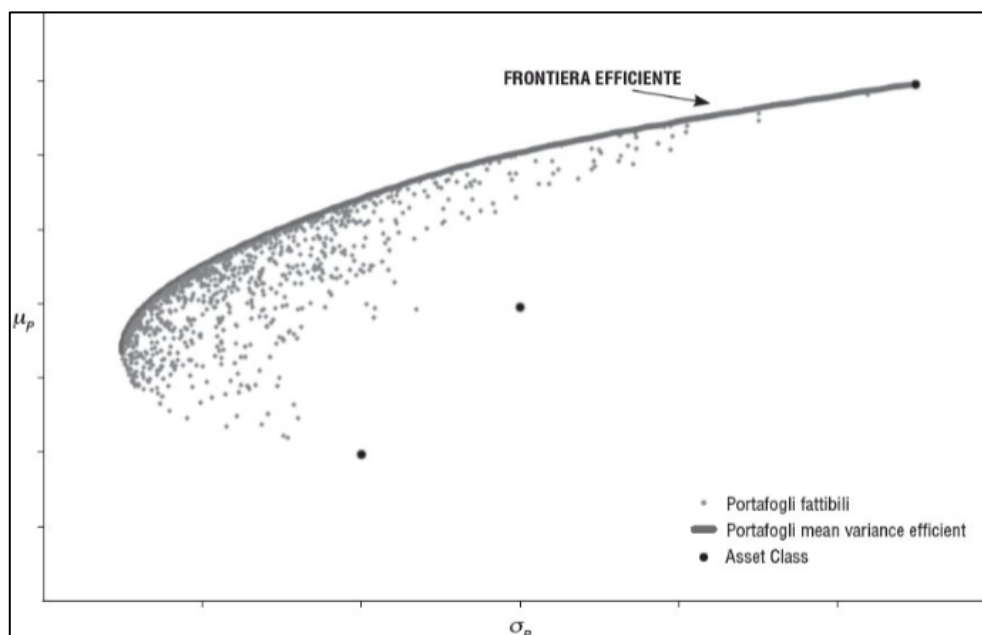
I vincoli posti nel modello di ottimizzazione di Markowitz sono i seguenti:

- vincolo tecnico: la somma dei pesi ottenuti come output finali per le asset class deve rappresentare il 100% del portafoglio, vincolo *full investment constraint*;
- vincolo tecnico: il peso associato a ciascuna asset class può essere solamente positivo, maggiore o uguale a zero, vincolo *long-only constraint*;
- vincolo finanziario: nell'ambito dell'algoritmo di ottimizzazione, la minimizzazione del rischio deve avvenire per dato livello di rendimento ricercato.

La logica quantitativa alla base del modello di ottimizzazione di Markowitz verrà ripresa nel quarto capitolo, dedicato al confronto tra il modello *Mean Variance Optimization* e il modello proposto che si pone l'obiettivo di essere più affine alla visione dell'investitore avverso al rischio.

Il modello di ottimizzazione individua, per ciascun livello di rendimento atteso, il portafoglio caratterizzato dal minimo livello di rischio possibile. L'insieme delle soluzioni ottimali così ottenute costituisce la precedentemente definita frontiera efficiente, che viene di seguito riportata graficamente.

Figura 1.1 Frontiera Efficiente di Markowitz



Fonte: Volume "Asset management e investitori istituzionali", Braga M.D. et al. (2024)

Osservando la convessità della frontiera efficiente proposta da Markowitz emerge un aspetto rilevante della sua teoria: l'esistenza di rendimenti marginali decrescenti rispetto al rischio assunto. Nello specifico, percorrendo la frontiera efficiente verso portafogli caratterizzati da rendimenti attesi più elevati, l'investitore è costretto ad accettare incrementi di rischio progressivamente maggiori al fine di ottenere incrementi sempre più contenuti del rendimento atteso.

Questa proprietà emerge dalla definizione delle variabili coinvolte: mentre il rendimento atteso di un portafoglio è funzione lineare dei pesi attribuiti alle singole attività finanziarie, il rischio, misurato con la varianza, o deviazione standard, dipende dalle correlazioni esistenti tra i differenti asset. Come verrà presentato nei successivi capitoli, la considerazione delle covarianze genera il beneficio della diversificazione, che risulta particolarmente intenso nelle aree iniziali della frontiera ma tende tuttavia a ridursi all'aumentare dei rendimenti ricercati e dell'eccessiva numerosità degli asset in portafoglio.

La concavità della frontiera efficiente, dunque, segnala come il rischio assunto non venga remunerato in modo proporzionale: se è vero che, a livelli contenuti di rischio, piccoli incrementi dello stesso possono tradursi in miglioramenti relativamente significativi del rendimento atteso, è altrettanto corretto affermare che, nelle porzioni più elevate della frontiera, ulteriori aumenti del rischio producono incrementi marginali di rendimento progressivamente inferiori.

L'investitore non può quindi attendersi una remunerazione costante per ogni unità aggiuntiva di rischio assunta; il *trade-off* tra le due variabili risulta non lineare e, superato un certo livello, l'assunzione di rischio addizionale comporta benefici marginali meno consistenti in termini di rendimento atteso.

Nel paragrafo che segue verranno analizzati la funzione di utilità per l'investitore di Markowitz e le eventuali forme di deviazione dalla distribuzione normale dei rendimenti.

I.II Funzione di utilità e forme di deviazione dalla normalità

L'investitore razionale di Markowitz, secondo il modello precedentemente definito, orienterà le proprie scelte verso un portafoglio appartenente alla frontiera efficiente, coerentemente con l'obiettivo di massimizzazione dell'utilità attesa. Tuttavia, la sola individuazione della frontiera efficiente non è sufficiente a determinare il portafoglio ottimale, poiché la scelta finale dipende dalle preferenze individuali dell'investitore nei confronti del *trade-off* tra rischio e rendimento.

A tale scopo, il modello incorpora le preferenze dell'investitore mediante una funzione di utilità quadratica, attraverso la quale viene rappresentato anche il diverso grado di avversione al rischio associato alle scelte di portafoglio:

$$E(U) = E(R) - \frac{1}{2} A \sigma^2$$

Dove:

la funzione di utilità, $E(U)$, sintetizza il trade-off tra rendimento atteso, $E(R)$, e rischio, σ , attribuendo un incremento di utilità per l'investitore al crescere del primo (relazione direttamente proporzionale), ed una diminuzione all'aumentare del secondo (relazione inversamente proporzionale).

Particolare attenzione, ai fini della tesi, merita il parametro A , che quantifica il grado di avversione al rischio dell'investitore. Tale coefficiente determina l'intensità con cui il rischio viene percepito dall'investitore all'interno della funzione di utilità e, conseguentemente, influenza la scelta del portafoglio ottimale lungo la frontiera efficiente; viene introdotto così il tema delle preferenze individuali e percezione dell'investitore nei confronti del rischio, elemento centrale del dibattito tra finanza tradizionale e finanza comportamentale.

Ne consegue che, investitori caratterizzati da differenti livelli di avversione al rischio, individueranno differenti portafogli ottimali lungo la medesima frontiera efficiente.

Da quello che si evince dalla funzione, dunque, l'utilità per l'investitore secondo Markowitz è determinata dal *trade-off* tra rendimento atteso e rischio. Il rendimento atteso contribuisce positivamente al livello di utilità, mentre il rischio incide negativamente ed è rappresentato dalla volatilità del portafoglio, ponderata per il grado di avversione al rischio dell'investitore.

Ne consegue che la scelta ottimale deriva dal bilanciamento tra la massimizzazione del rendimento atteso e la minimizzazione del rischio assunto, quest'ultimo misurato attraverso la varianza dei rendimenti.

Sebbene l'approccio di Markowitz abbia rappresentato una svolta fondamentale nella teoria della selezione di portafoglio, esso presuppone la consapevolezza di alcune ipotesi semplificatrici su cui si fonda.

Tra le assunzioni cui si fa riferimento, quella che si analizza nello specifico riguarda il comportamento delle serie storiche dei rendimenti delle asset class.

Nel dettaglio, la *Mean Variance Optimization* ipotizza che i rendimenti delle asset class seguano una distribuzione normale, ovvero conformi alla distribuzione gaussiana, permettendo così ai primi due momenti statistici, rendimento atteso e varianza (o deviazione standard), di descrivere in modo esaustivo il comportamento della distribuzione stessa.

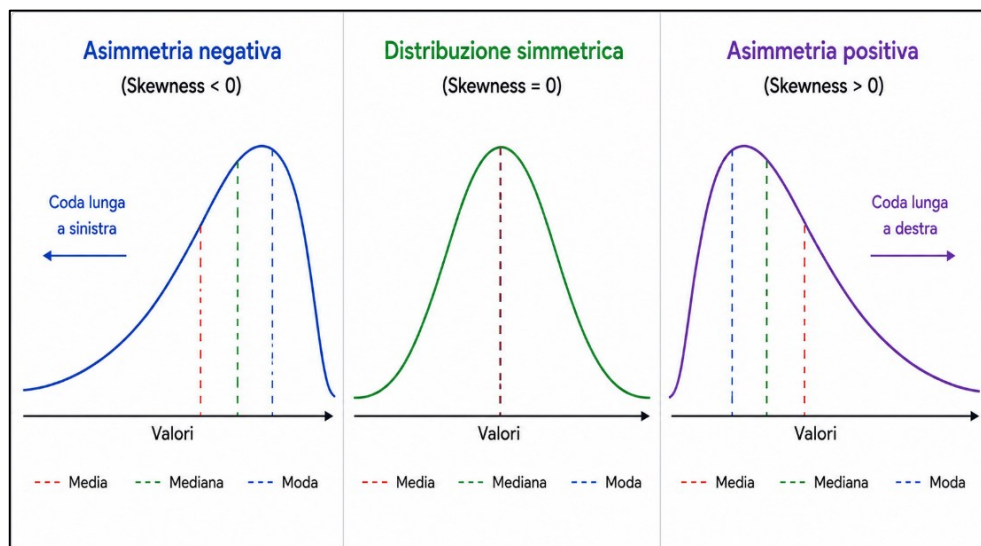
Tuttavia, evidenze empiriche hanno mostrato come i rendimenti finanziari si discostino spesso dall'ipotesi di normalità, presentando fenomeni di asimmetria e una maggiore frequenza di eventi estremi rispetto a quanto previsto dalla distribuzione normale.

Per quanto riguarda la prima casistica, l'asimmetria dei rendimenti, si utilizza un coefficiente di asimmetria noto come *skewness*, noto anche come momento terzo.

In questa circostanza, la funzione di densità rappresentativa della distribuzione dei rendimenti non mostra una bilanciata e speculare dispersione dei rendimenti a destra e sinistra del valore atteso e, di conseguenza, lo scostamento tra valore medio e mediana dei rendimenti, con il possibile allungamento della coda di destra (asimmetria o *skewness* positiva), quella preferita dagli investitori, oppure della coda sinistra (asimmetria o *skewness* negativa), quella temuta dagli investitori.

Si riportano di seguito i grafici delle possibili distribuzioni dei rendimenti.

Figura 1.2 Skewness



Fonte: Elaborazione personale

Osservando i tre differenti grafici relativi alle distribuzioni dei rendimenti, si osserva come, a differenza della distribuzione normale su cui si fonda la teoria di Markowitz, riportata nel grafico centrale, le altre due distribuzioni evidenziano una forma asimmetrica.

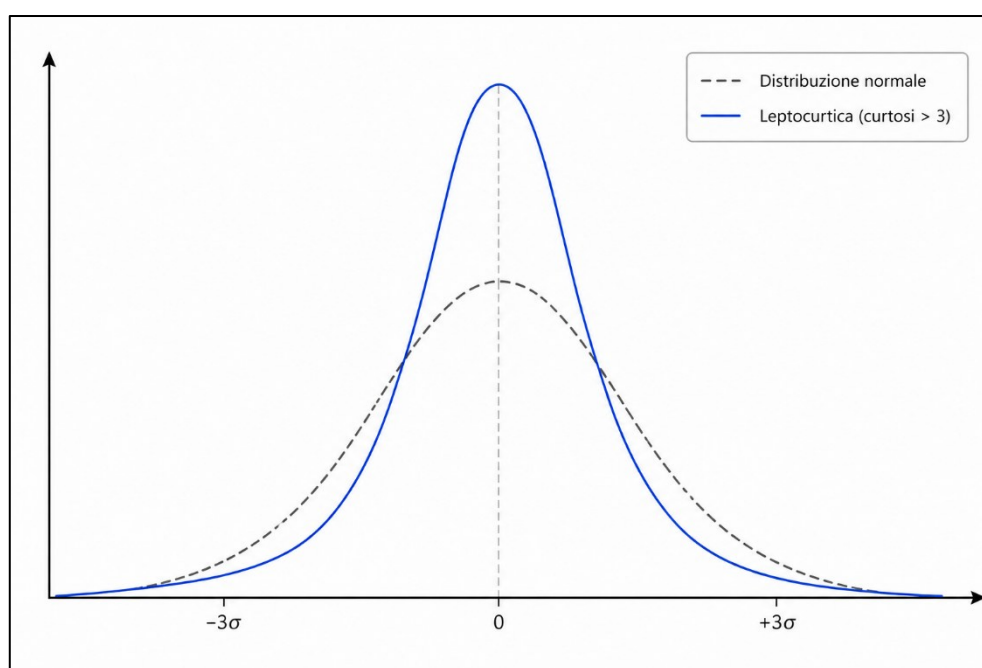
Nel grafico a sinistra, la distribuzione presenta una coda a sinistra allungata; dunque, si è in presenza di una *skewness* negativa. Questo, implica che la distribuzione dei rendimenti è

caratterizzata da una maggiore probabilità di osservare rendimenti estremamente negativi rispetto a quanto previsto dalla distribuzione normale. Come suggerito in precedenza, in questa condizione gli investitori risultano maggiormente esposti al rischio di perdite elevate e inattese. Nel grafico a destra invece, la distribuzione dei rendimenti restituisce una coda allungata a destra, definendo così una situazione di *skewness* positiva. La maggiore probabilità di osservare rendimenti positivi rispetto a quanto definito dalla distribuzione normale si traduce, in questo caso, in un vantaggio per l'investitore, il quale beneficia di risultati superiori alle attese.

La seconda tipologia di violazione della distribuzione normale, la maggiore frequenza degli eventi estremi, viene analizzata attraverso il parametro di *kurtosis*, noto anche come momento quarto.

Viene presentato il confronto grafico tra una distribuzione con eccesso di curtosi positivo e la distribuzione normale.

Figura 1.3 Kurtosis



Fonte: Elaborazione personale

In questa fattispecie, i rendimenti sono concentrati attorno alla media ed emerge una notevole frequenza di valori superiori alle attese definiti come *outlier*, anomali. Questo si traduce in maggiore probabilità di osservare eventi estremi, con la possibilità di maggiore instabilità nei risultati finali dell'investimento, evento non generalmente apprezzato dall'investitore.

Questi parametri consentono di evidenziare caratteristiche che la varianza non è in grado di rappresentare, rispettivamente l'asimmetria della distribuzione dei rendimenti e la probabilità di eventi estremi, offrendo così una rappresentazione più completa del profilo rischio-rendimento degli investimenti.

Le considerazioni relative alla *skewness* e alla curtosi evidenziano come il modello media-varianza non sia sempre in grado di rappresentare in modo esaustivo tutte le caratteristiche della distribuzione dei rendimenti. Ciononostante, la *Modern Portfolio Theory* elaborata da Harry Markowitz ha esercitato un'influenza significativa sia sul piano teorico sia su quello pratico, ponendo le basi per lo sviluppo dei successivi modelli di *asset allocation* e gestione del rischio, influenzando profondamente la costruzione dei portafogli finanziari.

Nonostante la sua rilevanza, il modello presenta anche dei limiti legati principalmente alle ipotesi comportamentali su cui si fonda. La teoria assume infatti che gli investitori agiscano in modo pienamente razionale e che le decisioni finanziarie derivino esclusivamente da valutazioni di tipo oggettivo di rischio e rendimento. Tuttavia, numerosi studi successivi hanno evidenziato come le scelte di investimento siano spesso influenzate anche da fattori psicologici, emotivi e cognitivi, che condizionano gli individui ad assumere comportamenti non sempre coerenti con i principi della razionalità economica. Proprio tali assunzioni verranno successivamente messe in discussione dalla finanza comportamentale e, in particolare, dalla *Prospect Theory* elaborata da Daniel Kahneman e Amos Tversky, i cui principali elementi teorici saranno approfonditi nel capitolo successivo.

II. Prospect Theory e Avversione alle Perdite

Nel corso di tutto il Novecento, la teoria economica tradizionale ha interpretato il comportamento degli individui attraverso il paradigma della razionalità. Secondo questa visione, gli individui sono considerati soggetti pienamente razionali, capaci di elaborare le informazioni in modo oggettivo e di prendere decisioni orientate alla massimizzazione della propria utilità. Le scelte economiche che compiono vengono descritte come il risultato di valutazioni logiche e coerenti, basate su un *trade-off* tra costi e benefici, con la capacità di analizzare le probabilità associate ai possibili risultati.

Tale impostazione ha rappresentato per decenni il fondamento teorico dominante dell'economia, trovando espressione nella teoria dell'utilità attesa elaborata da John von Neumann e Oskar Morgenstern. Secondo questo modello, gli individui valutano le alternative disponibili attribuendo a ciascun risultato una determinata utilità e una probabilità di realizzazione oggettiva, optando infine per l'opzione in grado di massimizzare il valore atteso.

Con il progressivo sviluppo della psicologia cognitiva e degli studi sperimentali sul comportamento umano, sono tuttavia emerse numerose evidenze empiriche incompatibili con l'ipotesi della perfetta razionalità degli individui. In molte situazioni caratterizzate da rischio e incertezza, gli individui mostravano comportamenti sistematicamente differenti rispetto a quelli previsti dalla teoria economica tradizionale. Le decisioni apparivano infatti influenzate da emozioni, percezioni soggettive, errori cognitivi ed elementi contestuali.

È con questo pregresso che, nel 1979, i due psicologi Daniel Kahneman e Amos Tversky hanno sviluppato la *Prospect Theory*, presentandola nell'articolo "*Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk*".

La *Prospect Theory* rientra nella *finanza comportamentale*, branca dell'economia comportamentale che, a partire dalle scienze cognitive, analizza il comportamento degli agenti economici e i loro processi decisionali.

Questa teoria innovativa ha rappresentato una svolta fondamentale nello studio delle decisioni economiche, poiché ha introdotto all'interno dell'analisi economica variabili psicologiche fino a quel momento trascurate.

La teoria è nata come critica alla *Expected Utility Theory*: l'intuizione di Kahneman e Tversky è consistita nel dimostrare che gli individui interpretano le scelte rispetto ad un punto di riferimento soggettivo, contrariamente alla valutazione del risultato finale, proposta dalla teoria utilitarista.

La *Prospect Theory* si configura come una teoria descrittiva del comportamento decisionale, finalizzata a chiarire le modalità con cui le persone prendono decisioni in condizioni di rischio e incertezza; sottolineando come gli individui non assumano decisioni secondo criteri perfettamente razionali, bensì attraverso valutazioni soggettive influenzate da fattori psicologici, cognitivi ed emotivi, *bias* ed *euristiche*. Kahneman e Tversky nella loro pubblicazione, hanno evidenziato come le scelte economiche siano fortemente influenzate dalla percezione soggettiva del rischio, dall'avversione alle perdite e dalle modalità con cui le informazioni vengono poste.

Gli autori hanno elaborato questa teoria con l'obiettivo di descrivere il reale comportamento umano in condizioni di rischio e incertezza, mettendo in evidenza i limiti della teoria dell'utilità attesa nello spiegare le scelte economiche concrete.

Partendo dal presupposto che, secondo l'impostazione tradizionale dell'economia neoclassica, gli individui valutano le alternative esclusivamente in funzione del risultato finale ottenibile: la teoria dell'utilità attesa presuppone che il decisore sia in grado di attribuire alle diverse alternative probabilità oggettive e valori stabili, scegliendo infine l'opzione che massimizza l'utilità complessiva attesa. Tale modello si basa sull'idea di una razionalità coerente e costante, indipendente dal contesto psicologico o dalle modalità con cui il problema viene presentato.

I due autori della *Prospect Theory*, Kahneman e Tversky, partendo da un sondaggio posto a degli studenti universitari, hanno iniziato a confutare le tesi della teoria dell'utilità attesa.

La richiesta era quella che segue.

Quesito 1:

“Quale delle seguenti preferiresti?”

Opzione A. 50% di probabilità di vincere 1000 (Israeli pounds), 50% di probabilità di non vincere nulla.

Opzione B. la sicurezza di ottenere 450 (Israeli pounds) ”.

Di seguito viene calcolato il valore atteso per entrambe le opzioni:

$$\text{Valore atteso A} = 1000 * 0.5 + 0 * 0.5 = 500$$

$$\text{Valore atteso B} = 450 * 1 = 450$$

Il questionario, dunque, poneva gli intervistati di fronte alla possibilità di una vincita certa rispetto al rischio di non ottenere nulla o, eventualmente, più del doppio.

Secondo quanto affermato dalla teoria dell'utilità attesa, l'individuo, che è in grado di prendere le decisioni razionalmente, dopo aver calcolato il valore atteso delle due possibili scelte, avrebbe optato per l'opzione A, in quanto questa restituisca un valore atteso di 500 mentre l'opzione B restituisce un valore atteso di 450.

Tuttavia, la maggior parte degli studenti ha scelto l'opzione B, quella con valore atteso inferiore: dimostrando che la teoria utilitarista mostra delle lacune quando si tratta di prendere decisioni in condizione di incertezza e rischio.

Tramite successive indagini e sondaggi, i due autori della Teoria del Prospetto hanno introdotto una prospettiva differente. Sostenevano che gli individui valutano gli esiti possibili delle loro scelte non in termini assoluti, piuttosto che tendono ad interpretarli come guadagni o perdite rispetto ad un punto di riferimento soggettivo, definito come *reference point*. Questo, può essere influenzato da differenti fattori: la situazione economica attuale dell'individuo, le sue aspettative personali, oppure condizionato da uno standard psicologico determinato dal contesto sociale e dalle esperienze precedenti. Di conseguenza due individui possono reagire in modo completamente differente di fronte al medesimo risultato economico, a seconda delle aspettative maturate o del contesto nel quale la decisione viene presa.

Portando un esempio intuitivo, un incremento salariale può essere percepito come estremamente vantaggioso da un soggetto che non si aspettava alcun miglioramento, mentre può generare insoddisfazione verso chi si attendeva un aumento maggiore.

Riprendendo il precedente sondaggio, lo si è posto in termini di perdite invece che di guadagni/vincite, si evidenziano in seguito i risultati ottenuti.

Quesito 2:

“Quale delle seguenti preferiresti?”

Opzione A. 50% di probabilità di perdere 1000 (Israeli pounds), 50% di probabilità di non perdere nulla.

Opzione B. la sicurezza di perdere 450 (Israeli pounds) ”.

Di seguito viene calcolato il valore atteso per entrambe le opzioni

$$\text{Valore atteso A} = -1000 * 0.5 + 0 * 0.5 = -500$$

$$\text{Valore atteso B} = -450 * 1 = -450$$

Concentrandosi questa volta sulla prospettiva delle perdite, i risultati hanno evidenziato che la maggior parte degli intervistati ha optato per l'opzione A, seppur anche in questo caso restituisca un valore atteso inferiore rispetto a quello dell'altra scelta possibile.

Tuttavia, l'aspetto più interessante emerge nella diversa modalità decisionale adottata dai partecipanti, in relazione alla situazione proposta. È emerso come nella maggior parte dei casi, nel rispondere al primo quesito, gli individui abbiano preferito un guadagno certo piuttosto che uno possibile; mentre nel secondo quesito, la maggior parte abbia optato per prendersi il rischio di una perdita maggiore pur di non essere certi di subire una perdita sicura.

Dunque, la percezione della perdita è così gravosa agli occhi dell'individuo da fargli prendere la decisione di assumersi un rischio maggiore pur di cercare di evitare una perdita certa, tuttavia con la possibilità di ottenere una perdita superiore.

A partire dallo studio dei quesiti proposti e dalla definizione del *reference point*, visto come punto di riferimento attraverso il quale l'investitore interpreta guadagni e perdite, Kahneman e Tversky hanno elaborato la cosiddetta *funzione di valore*, destinata a sostituire la tradizionale funzione di utilità prevista dalla teoria classica.

II.I Funzione del valore

La funzione del valore proposta da Kahneman e Tversky è così definita:

$$V(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \geq 0; 1 > \alpha > 0; \\ -\lambda (-x)^\beta, & x < 0; 1 > \beta > 0 \end{cases}$$

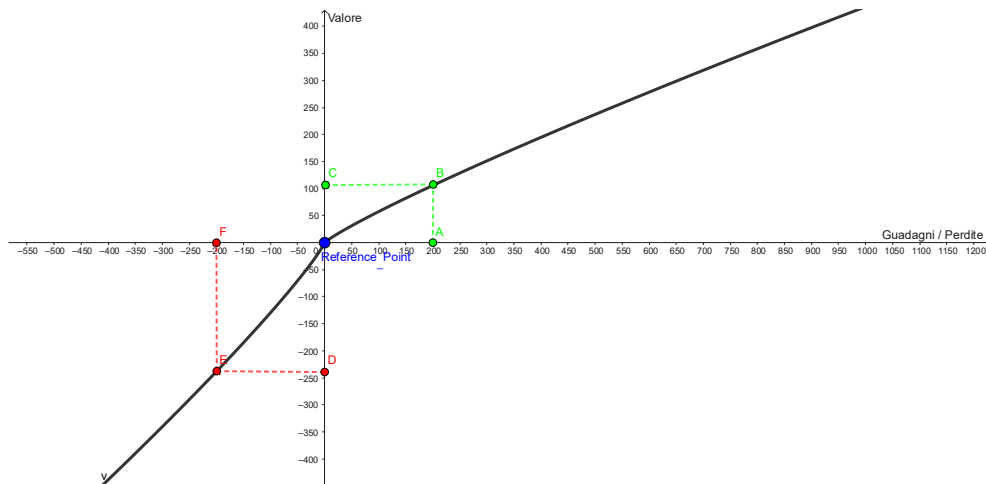
Dove:

- x rappresenta il guadagno o la perdita rispetto al punto di riferimento;
- α e β rappresentano la sensibilità ai guadagni/perdite e sono generalmente $0 < \alpha, \beta < 1$ e suggeriscono che si è sempre meno sensibili all'aumentare marginale del guadagno/perdita. Osservazioni empiriche successive hanno mostrato che $\alpha = \beta$ e che il loro valore sia circa 0.88; in definitiva, per ogni unità di aumento di guadagno, aumenta l'utilità percepita ma in modo minore;

- λ rappresenta l'avversione alle perdite, ovvero il peso psicologico delle perdite rispetto ai guadagni di pari entità. Si stima che questo valore sia compreso tra 1.5 e 2.5 a seconda dell'individuo, con studi empirici che mostrano un valore approssimato di circa 2.25.

Di seguito viene rappresentata graficamente la *funzione del valore* proposta dagli autori.

Figura 2.1 Funzione del Valore Prospect Theory



Fonte: Elaborazione personale

La funzione $V(x)$ non si presenta come una funzione con andamento lineare, bensì rivela una struttura asimmetrica, “a forma di S”, che riflette il diverso modo in cui gli individui percepiscono guadagni e perdite. È concava nel primo quadrante, nel dominio $[0, +\infty)$, area riferita ai guadagni; mentre risulta convessa nel terzo quadrante, nel dominio $(-\infty, 0]$, area riferita alle perdite; si denota anche una maggiore inclinazione nella zona delle perdite rispetto a quella dei guadagni.

La struttura concava della funzione nella zona dei guadagni, implica che gli individui manifestano una sensibilità decrescente rispetto alle variazioni economiche. Si può affermare che il beneficio marginale percepito è decrementale all'aumentare dei guadagni. La differenza psicologica percepita a fronte di un incremento da 100 a 200 euro risulta generalmente maggiore rispetto a quella associata a un incremento da 1.100 a 1.200 euro, seppure l'aumento monetario sia il medesimo in termini assoluti.

Poiché il valore soggettivo dei guadagni cresce in misura progressivamente minore, gli individui tendono a preferire un risultato certo rispetto ad uno superiore ma solamente

probabile, attribuendo alla certezza un peso psicologico maggiore rispetto al calcolo del valore atteso.

Tale meccanismo, viene definito come *Effetto Certezza*, *Certainty Effect*, introdotto dall'economista francese Maurice Allais e ripreso da Kahneman e Tversky, indica la tendenza degli individui a preferire un esito sicuro rispetto ad uno probabile, anche quando quest'ultimo potrebbe risultare più vantaggioso dal punto di vista razionale o matematico. Questo *bias* si accosta molto frequentemente ad un'altra tipologia di *bias*, l'*Effetto Disposizione*, *Disposition Effect*, ossia la propensione degli investitori a vendere precocemente i titoli in profitto, temendo di veder dissolvere i guadagni che vengono percepiti come certi.

Questo atteggiamento è frequente nel dominio dei guadagni: gli investitori talvolta vendono un asset in profitto, preferendo la certezza del guadagno piuttosto che assunzione del rischio di non concretizzarlo in futuro, confrontando così il possibile guadagno futuro (probabile ma non certo) rispetto a qualcosa che gli si palesa come garantito.

Tuttavia, si ritiene opportuno precisare che un guadagno (così come una perdita) non si concretizza come tale fin quando l'asset non viene venduto, quindi l'irrazionalità dell'individuo si denota anche nella sua errata percezione dell'investimento “in positivo” come guadagno certo.

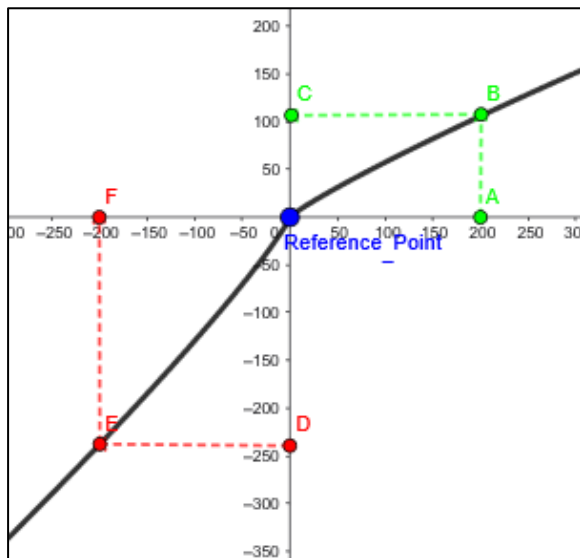
Procedendo nell'analisi della funzione, riferendoci nello specifico al quadrante delle perdite, si verifica invece il fenomeno opposto. La convessità della funzione riflette una maggiore propensione al rischio quando gli individui cercano di evitare una perdita. In presenza di una perdita economica percepita come certa, molti investitori tendono ad assumere comportamenti rischiosi pur di tentare di recuperare la situazione iniziale.

Un esempio potrebbe essere la prolungata detenzione di un asset di qualità pessima per cercare di recuperare la perdita potenziale che questo sta generando.

Concludendo, dal confronto tra la funzione nel dominio dei guadagni e in quello delle perdite emerge anche come, a fronte di un guadagno e di una perdita di pari entità, l'investitore attribuisca a quest'ultima un impatto psicologico significativamente maggiore.

Ne consegue che le perdite vengono percepite con un'intensità superiore rispetto ai guadagni equivalenti.

Figura 2.2 Funzione del Valore Prospect Theory



Nel caso preso in esempio, si tratta di un guadagno/perdita di ammontare ± 200 .

L'investitore in caso di guadagno attribuisce un valore $V(200)$ di circa +100 (punti A,B,C), mentre nel caso di una perdita percepisce un valore $V(200)$ di quasi -250 (punti D,E,F).

Questa notevole differenza nel valorizzare guadagni e perdite di pari entità si traduce successivamente in *Avversione alle Perdite*, *Loss Aversion*.

Fonte: Elaborazione personale

II.II Bias cognitivi e Avversione alle Perdite

Come precedentemente mostrato, nell'esempio sulla funzione del valore emerge l'elemento centrale della *Prospect Theory*: l'*Avversione alle Perdite*, la cosiddetta *Loss Aversion*.

Prima di analizzare le caratteristiche di questo *bias* cognitivo, è opportuno definire il concetto di *bias* e presentare i principali *bias* cognitivi individuati da Daniel Kahneman e Amos Tversky

I *bias* cognitivi rappresentano delle distorsioni sistematiche dei processi di giudizio e di decisione che influenzano il modo in cui gli individui interpretano le informazioni e valutano le diverse alternative disponibili.

Tali distorsioni derivano dall'utilizzo di scorciatoie cognitive, le *euristiche*, che consentono al cervello di elaborare rapidamente le informazioni e di ridurre la complessità dei processi decisionali.

Sebbene queste permettano di prendere decisioni in modo efficiente, specialmente in contesti caratterizzati da incertezza o limitatezza delle informazioni, esse possono condurre ad errori di valutazione e a comportamenti non pienamente razionali.

I *bias* cognitivi evidenziano come le decisioni degli individui siano frequentemente influenzate da fattori psicologici ed emotivi, in contrasto dunque con l'ipotesi di razionalità perfetta postulata dalla teoria economica tradizionale.

Gli studi condotti da Daniel Kahneman e Amos Tversky hanno avuto un ruolo fondamentale nell'analisi dei *bias* cognitivi, dimostrando come tali meccanismi incidano sistematicamente sulle scelte economiche e sui processi decisionali degli individui, specialmente quando gli individui si trovano di fronte ad una decisione da prendere in un contesto di incertezza.

Tra i principali *bias* cognitivi descritti dai due autori si possono individuare:

- l'*Overconfidence*, ossia la tendenza degli individui a sovrastimare le proprie conoscenze, capacità previsionali e competenze decisionali;
- il *Framing Effect*, ossia la tendenza degli individui a farsi influenzare nei propri processi decisionali dalla modalità di formulazione del problema o questione in esame;
- il *Certainty Effect*, il quale descrive la tendenza a preferire risultati certi rispetto a risultati solamente probabili, attribuendo un peso eccessivo alla certezza.
- la *Loss Aversion* e il *Disposition Effect*.

L'Avversione alle Perdite si riferisce al fenomeno secondo il quale i *decision-makers*, nell'ambito in esame gli investitori, sono molto più sensibili alle perdite rispetto che ai guadagni: una perdita produce così un impatto psicologico significativamente più intenso rispetto ad un guadagno di pari entità. Si è stimato che il parametro rappresentativo dell'avversione alle perdite (λ) sia circa 2.25, dunque una perdita viene percepita con un'intensità più che doppia rispetto ad un guadagno dello stesso ammontare; tuttavia anche questa percezione è variabile, vi sono individui più sensibili e altri più indifferenti.

Questo *bias* risulta coerente con il concetto di *Reference Point* elaborato dagli autori della *Prospect Theory*, in quanto gli investitori tendono a percepire guadagni e perdite rispetto ad un determinato punto di riferimento, influenzando la valutazione soggettiva degli esiti economici e determinando comportamenti spesso non coerenti con i modelli di razionalità precedenti.

L'avversione alle perdite può manifestarsi in differenti circostanze e, come descritto nella funzione del valore, non determina comportamenti uniformi e definibili secondo criteri comuni. Si propongono differenti situazioni nelle quali l'avversione alle perdite incide significativamente sul processo decisionale e sull'emotività dell'investitore, tali situazioni vengono descritte come dinamiche decisionali opposte al *market timing* tradizionale.

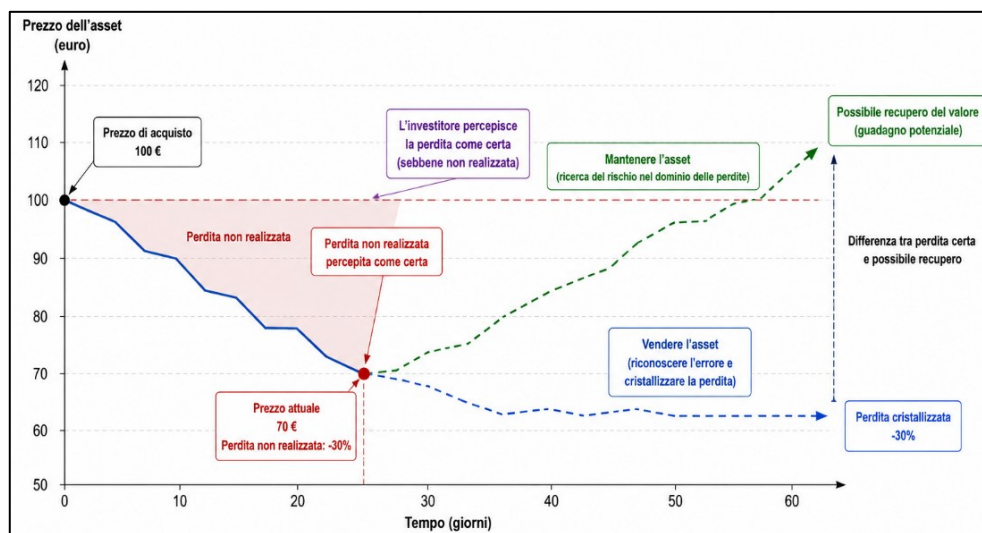
Caso 1

Un investitore ha acquistato un asset che si è rivelato inefficace rispetto agli obiettivi prefissati e che attualmente registra una posizione in perdita non ancora realizzata.

Sebbene l'asset non sia stato ancora venduto, l'investitore tende a percepire la perdita come sostanzialmente certa e si trova quindi di fronte a due alternative: da un lato riconoscere l'errore iniziale di valutazione del titolo, procedendo con la vendita e cristallizzando così la perdita; dall'altro mantenere l'asset, assumendo un livello di rischio più elevato nella speranza di un possibile recupero del valore.

In linea con l'effetto di avversione alle perdite e con la tendenza degli individui alla ricerca del rischio nel dominio delle perdite, nella maggior parte dei casi l'investitore tende a mantenere l'asset per cercare di recuperare la perdita.

Figura 2.3 Caso 1 Avversione alle Perdite – investimento inefficiente



Fonte: Elaborazione personale

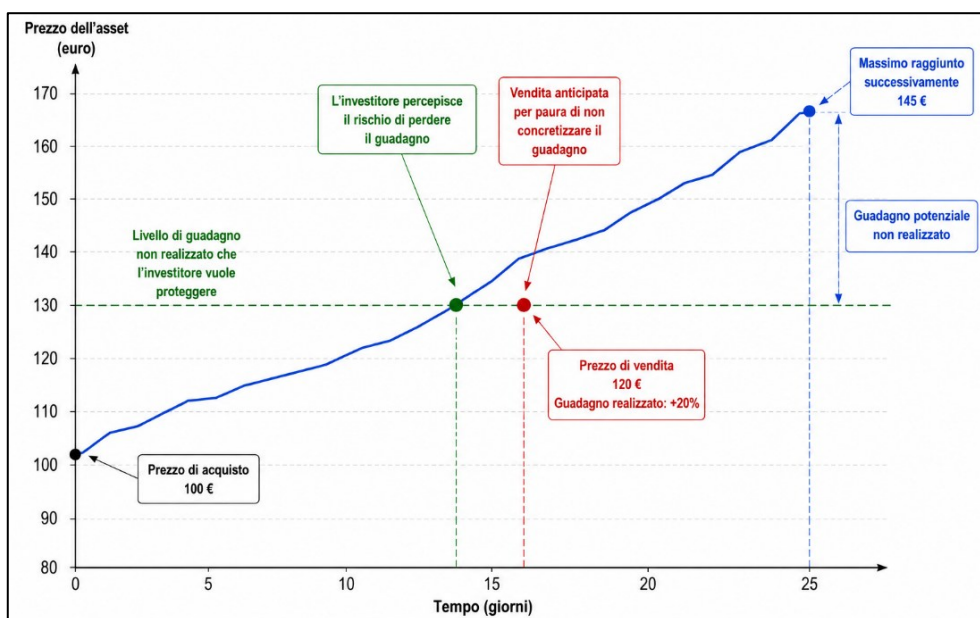
Come mostrato nell'immagine, l'investitore si trova di fronte alla scelta tra mantenere l'asset in perdita, assumendosi un rischio maggiore, oppure riconoscere e concretizzare la perdita.

Caso 2

Un investitore detiene un asset che presenta una performance positiva e, apparentemente, il contesto di mercato è favorevole al proseguimento della tendenza rialzista. Tuttavia, in presenza di avversione alle perdite e del correlato timore di veder eroso il guadagno già maturato, l'investitore tende a preferire la realizzazione immediata del profitto rispetto al mantenimento della posizione.

In tale circostanza, la decisione di vendita anticipata è guidata dalla volontà di “cristallizzare” il guadagno, riducendo l’esposizione al rischio di una possibile inversione di tendenza. Questo comportamento può tuttavia comportare un costo opportunità, nella misura in cui l’investitore si preclude eventuali ulteriori guadagni derivanti dal proseguimento del movimento favorevole del mercato.

Figura 2.4 Caso 2 Avversione alle Perdite – vendita anticipata



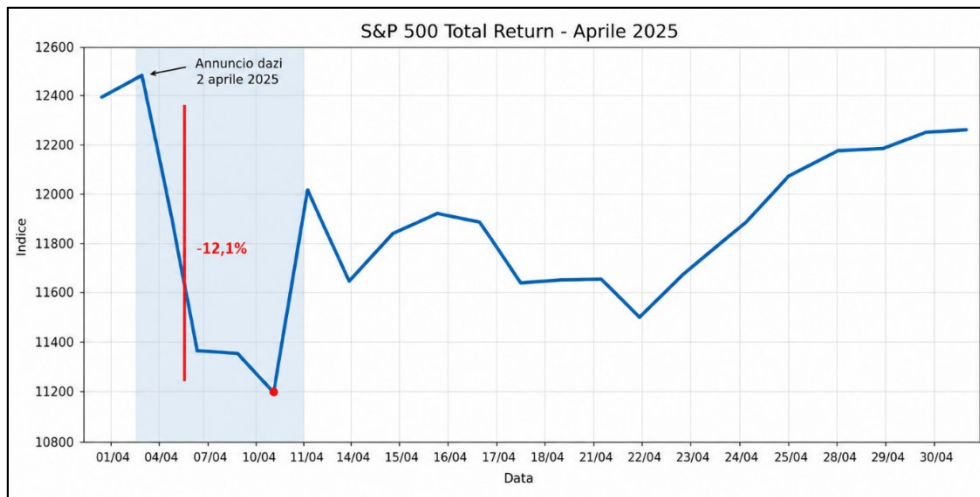
Fonte: Elaborazione personale

Come mostrato nell’immagine, l’investitore, mosso dal timore di non riuscire a realizzare il guadagno percepito (erroneamente) come certo, decide di vendere anticipatamente il titolo, precludendosi la possibilità di conseguire un rendimento superiore.

Caso 3

Per esaminare il terzo contesto di avversione alle perdite, si prende in considerazione un caso reale. Viene esaminato il periodo dei dati annunciati da Donald Trump nell’aprile 2025, è stato utilizzato come riferimento l’indice *S&P 500*, denominato in dollari, con valorizzazioni prese dalla banca dati *Refinitiv*. Di seguito viene rappresentato il grafico relativo a tale intervallo temporale con frequenza delle osservazioni giornaliera.

Figura 2.5 Caso 3 Avversione alle Perdite – dazi Donald Trump, mese



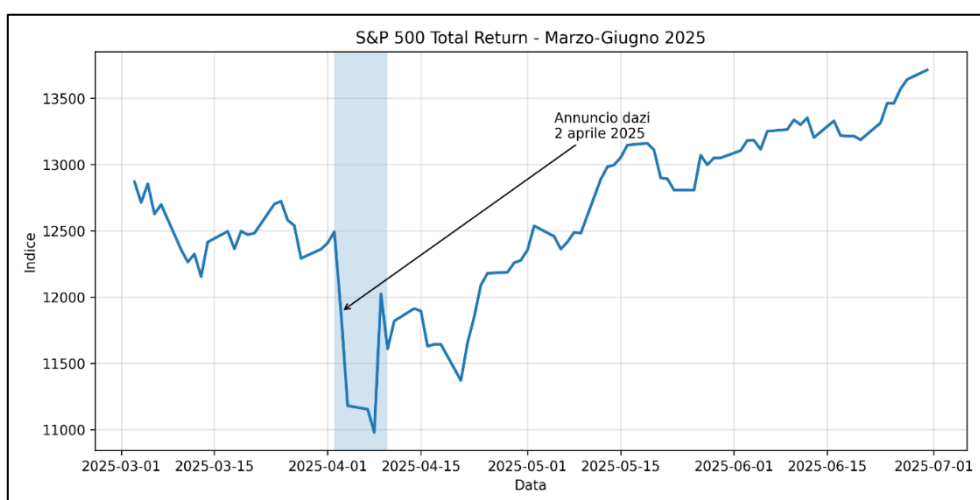
Fonte: Elaborazione personale

Come si evince dalla rappresentazione grafica dell'indice nel mese di aprile 2025, in seguito all'annuncio dei dazi, il mercato ha registrato una brusca fase di ribasso iniziale.

Un investitore con questo indice all'interno del proprio portafoglio, allarmato dalle notizie e, osservando la repentina diminuzione del valore dell'asset detenuto, avrebbe potuto essere indotto alla vendita.

Ponendo il caso di un investitore caratterizzato da un'elevata avversione alle perdite, le condizioni di mercato e la componente emotiva avrebbero potuto portare alla decisione di liquidare la posizione per via del timore di ulteriori ribassi e, conseguente erosione del capitale investito. Tuttavia, come verrà evidenziato anche dal successivo grafico, che amplia l'orizzonte temporale a quattro mesi, periodo da marzo a fine giugno 2025, la vendita dell'asset in concomitanza di uno shock di mercato non rappresenta necessariamente la scelta ottimale, bensì, contrariamente, in un'ottica di investimento di medio lungo periodo, può rivelarsi una decisione inefficiente e affrettata.

Figura 2.6 Caso 3 Avversione alle Perdite – dazi Donald Trump, quadrimestre



Fonte: Elaborazione personale

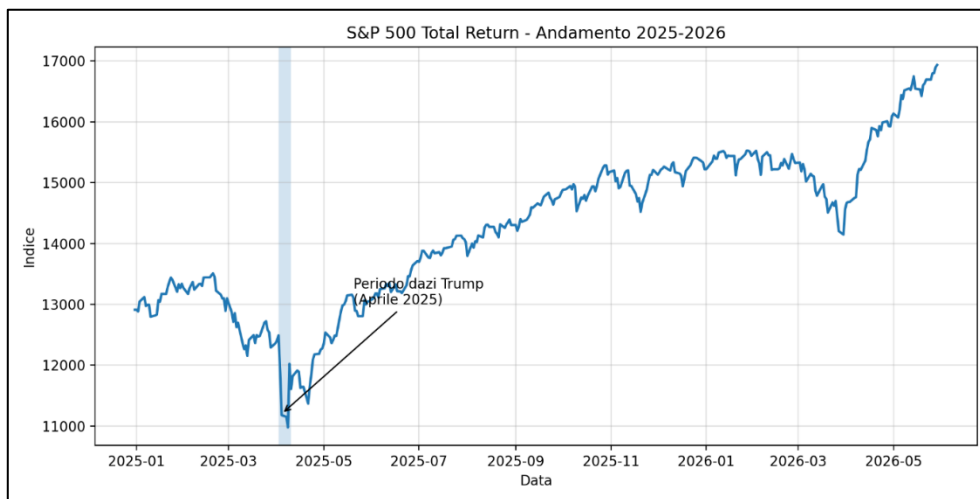
Come si può notare graficamente, sebbene nel breve termine l'annuncio dei dazi abbia generato uno shock negativo significativo nell'indice (dinamica riscontrabile considerando anche l'indice globale *MSCI World*), considerando invece un arco temporale più esteso, quella correzione è stata ampiamente recuperata nell'arco di circa un mese.

Nel medesimo contesto, a differenza dell'investitore fortemente avverso alle perdite e guidato dall'emotività, l'investitore lungimirante, conscio del valore del suo investimento e della natura transitoria dello shock, avrebbe potuto addirittura incrementare la propria esposizione all'indice, nell'ottica di adottare una strategia di acquisto in fase di ribasso al fine di beneficiare di eventuali successive crescite.

Si evidenzia quindi una netta distinzione tra i due comportamenti: in un caso, spinto dal timore di ulteriori perdite, l'investitore avverso al rischio che ha liquidato la sua posizione, ha subito un'erosione del capitale durante la discesa e si è perso così la successiva fase di recupero; nell'altro caso invece, l'investitore che ha assunto il comportamento opposto, aumentando la sua esposizione all'asset in fase di ribasso, ha partecipato alla successiva ripresa del mercato, realizzando potenzialmente rendimenti superiori.

In un'ottica ancora differente, estendendo l'orizzonte temporale ad un anno, si osserva graficamente come l'impatto dei dazi si presenti come una correzione temporanea all'interno di un trend complessivamente crescente dell'indice considerato.

Figura 2.7 Caso 3 Avversione alle Perdite – dazi Donald Trump, anno



Fonte: elaborazione personale

Il caso analizzato evidenzia come, uno shock di mercato, se preso in considerazione nel breve periodo, possa indurre l'investitore a interpretare la correzione di mercato come una perdita permanente, riconducendo quindi il caso preso d'esempio ad ottiche decisionali riconducibili all'avversione alle perdite. Tale reazione può condurre alla liquidazione anticipata della posizione, concretizzando così la perdita e impedendo la partecipazione alla successiva fase di recupero dell'indice. L'analisi su un orizzonte temporale più esteso mostra tuttavia come la discesa iniziale si configuri come un fenomeno transitorio all'interno di una tendenza complessivamente crescente, mettendo in evidenza la rilevanza dell'orizzonte temporale nella valutazione delle decisioni di investimento.

Come emerge da tutti i casi precedentemente illustrati, nelle situazioni in cui l'investitore è chiamato ad assumere decisioni relative ai propri investimenti in condizioni di incertezza, tende frequentemente ad adottare comportamenti non pienamente razionali, potenzialmente in grado di compromettere l'efficacia delle proprie scelte finanziarie. In tale contesto, l'avversione alle perdite rappresenta uno dei *bias* cognitivi maggiormente influenti, poiché incide in maniera significativa sul processo decisionale e conseguentemente anche sull'andamento degli investimenti. Gli individui tendono infatti a compiere notevoli sforzi pur di evitare una perdita, anche quando il possibile guadagno risulterebbe razionalmente più conveniente.

Nel prossimo capitolo si cercherà dunque di analizzare la differente concezione del rischio tra quella dell'investitore e quella proposta dalla teoria predominante, quella di Markowitz.

III. Differenti concezioni di Rischio

La nozione di rischio costituisce uno degli elementi fondamentali dell'analisi economica e finanziaria: rappresenta il presupposto alla base di ogni decisione di investimento, allocazione delle risorse e valutazione delle attività finanziarie.

Nel corso del tempo, la teoria economica ha elaborato modelli finalizzati per cercare di quantificare il rischio in termini oggettivi e misurabili, assumendo l'ipotesi di individui come soggetti razionali in grado di compiere scelte coerenti e orientate alla massimizzazione dell'utilità attesa.

Tuttavia, come illustrato nei capitoli precedenti, si è dimostrato attraverso numerose evidenze empiriche come il comportamento effettivo degli investitori si discosti frequentemente dalle previsioni formulate dalla teoria tradizionale. Gli individui tendono infatti ad interpretare il rischio non esclusivamente come una variabile statistica, bensì come una dimensione soggettiva influenzata da fattori psicologici, emotivi e cognitivi; diviene quindi necessario adottare una concezione del rischio maggiormente affine a quella effettivamente percepita dall'investitore. Particolarmente significativo è risultato il contributo fornito dalla *Prospect Theory*, la quale ha introdotto una diversa interpretazione del rischio, maggiormente aderente alle modalità con cui gli individui percepiscono guadagni e perdite e, più in generale, alla reale percezione del rischio da parte dell'investitore; tale concezione, tuttavia, non ha ancora trovato piena applicazione nei tradizionali processi di costruzione dei portafogli finanziari, risultando pertanto particolarmente efficace sul piano teorico ma ancora limitatamente concreta sul piano pratico, dove si continua a privilegiare l'utilizzo di modelli riconducibili alla finanza classica.

Con il presente capitolo si propone quindi di analizzare le principali differenze tra la concezione del rischio elaborata da Harry Markowitz nell'ambito della *Modern Portfolio Theory* e quella effettivamente percepita dagli investitori, evidenziando il ruolo delle componenti psicologiche nei processi decisionali e richiamando i principali aspetti teorici della *Prospect Theory* precedentemente trattati.

III.I Rischio secondo Modern Portfolio Theory di Harry Markowitz

Come illustrato precedentemente, Harry Markowitz, attraverso l'elaborazione della *Modern Portfolio Theory*, ha fornito uno dei contributi più rilevanti nella definizione del concetto di

rischio nell'ambito della finanza classica. Secondo tale impostazione, gli investitori operano razionalmente perseguendo la massimizzazione del rendimento atteso in relazione ad un determinato livello di rischio, e viceversa.

Il rischio viene definito come incertezza, ravvisata nella variabilità dei rendimenti attorno ad un punto di riferimento; quest'ultimo viene individuato nel rendimento medio aritmetico calcolato su una serie storica di rendimenti.

In tale prospettiva, un investimento risulta tanto più rischioso quanto maggiore è l'oscillazione dei rendimenti rispetto al valore medio atteso.

A seguito si propone la formula della dispersione tipica dei rendimenti periodici attorno al loro rendimento medio, la deviazione standard o volatilità:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n - 1}}$$

Dove:

- x_i rappresenta la successione dei rendimenti storici considerati;
- μ è il rendimento medio aritmetico;
- n costituisce il numero totale di osservazioni, $n-1$ perché si lavora con un campione.

La volatilità è la misura tipica di oscillazione, dispersione dei rendimenti periodici attorno al rendimento medio.

Un dato livello di volatilità σ indica che, nella maggior parte dei periodi, i singoli rendimenti periodici hanno mostrato la tendenza ad allontanarsi, con valori sia positivi che negativi, dalla media dei rendimenti periodici entro σ punti percentuali.

Poiché la volatilità considera sia gli scostamenti positivi sia quelli negativi rispetto al rendimento medio, essa misura la variabilità complessiva dei rendimenti. Tuttavia, dal punto di vista dell'investitore, non tutte le oscillazioni hanno la medesima rilevanza: mentre gli scostamenti positivi rappresentano opportunità di guadagno, quelli negativi costituiscono una fonte di rischio e sono quindi oggetto di maggiore apprensione. Per questo motivo, nella valutazione del rischio si ricorre spesso a misure che considerano esclusivamente la variabilità al ribasso.

Markowitz, come precedentemente accennato, ha introdotto inoltre il principio della diversificazione mediante l'impiego delle nozioni statistiche di covarianza e correlazione tra

asset class, attraverso le quali è possibile determinare la varianza complessiva del portafoglio non esclusivamente in funzione della rischiosità dei singoli asset, bensì anche in relazione alle interdipendenze esistenti tra gli stessi.

L'obiettivo della costruzione di un portafoglio composto da attività caratterizzate da differenti livelli di correlazione è quello di ridurre il rischio complessivo di portafoglio senza necessariamente incidere negativamente sul rendimento atteso.

Ne consegue che il rischio non è più riconducibile unicamente alla singola attività finanziaria, ma assume un valore complessivo all'interno del portafoglio, risultando strettamente dipendente dalle correlazioni tra i diversi asset che lo compongono.

Il rischio di portafoglio è espresso con la seguente formula:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}$$

Dove:

- σ_p rappresenta il rischio – volatilità di portafoglio;
- w_i e w_j sono rispettivamente i pesi nel portafoglio degli asset presi in considerazione e, come da vincoli per la costruzione del portafoglio secondo Markowitz, non assumono valori negativi, dunque w_i e $w_j \geq 0$;
- ρ_{ij} indica la correlazione tra coppie di asset considerati, che assume un valore $-1 \leq \rho_{ij} \leq +1$.

L'approccio di Markowitz attribuisce dunque al rischio una natura prevalentemente quantitativa ed oggettiva, assumendo che gli investitori siano in grado di valutare razionalmente le probabilità associate ai differenti risultati possibili. Tale impostazione, pur avendo rappresentato un punto di riferimento fondamentale per la teoria finanziaria moderna, tende tuttavia a trascurare le componenti psicologiche ed emotive che influenzano concretamente il comportamento degli investitori.

Comportamenti come quelli esaminati nei casi illustrati nel capitolo precedente, possono mettere in discussione l'effettiva coerenza tra la concezione del rischio proposta dalla *Modern Portfolio Theory* di Markowitz rispetto a quella effettivamente percepita dall'investitore.

È ragionevole sostenere che, presupponendo un investitore pienamente razionale, quest'ultimo consideri il rischio come variabilità dei rendimenti attorno ad un rendimento medio atteso,

valutando le diverse alternative di investimento e selezionando, tra i possibili portafogli efficienti, quello maggiormente coerente con il proprio *trade-off* tra rischio e rendimento.

Ciononostante, come evidenziato precedentemente, gli investitori non prendono decisioni esclusivamente sulla base di criteri razionali; ne consegue pertanto una messa in discussione non solo dell'assunto di razionalità posto alla base della teoria, ma anche dell'effettiva adeguatezza delle metodologie tradizionalmente utilizzate nella valutazione del rischio finanziario, considerando inoltre che, tramite l'utilizzo della volatilità con misura del rischio, vengono prese in considerazione anche le oscillazioni positive, che non rappresentano un elemento di preoccupazione per l'investitore.

Ne consegue come l'individuo percepisca e tenda a valutare gli investimenti in modo differente, principalmente sulla base delle variazioni rispetto ad un determinato punto di riferimento, piuttosto che secondo una concezione del rischio intesa esclusivamente come volatilità dei rendimenti.

III.II Rischio secondo considerazione dell'investitore

A partire dalla nozione di *Reference Point* elaborata da D. Kahneman e A. Tversky nella *Prospect Theory*, nel presente paragrafo viene analizzato il concetto di rischio per come viene effettivamente percepito dall'investitore. Successivamente, verranno discusse alcune possibili modalità di integrazione di tale percezione nei processi di valutazione degli investimenti e nella costruzione di portafoglio.

Sebbene la teoria finanziaria tradizionale identifichi il rischio come volatilità dei rendimenti, numerose evidenze empiriche hanno mostrato come gli investitori tendano a percepirlo principalmente come probabilità di subire perdite rispetto ad un determinato punto di riferimento. Tale interpretazione risulta coerente con i principi della *Prospect Theory* e suggerisce l'opportunità di integrare alle tradizionali misure di rischio e processi di costruzione del portafoglio differenti indicatori di valutazione del rischio maggiormente coerenti con la percezione effettiva dell'investitore.

Il concetto di *Reference Point* rappresenta uno degli elementi fondamentali per comprendere il processo attraverso il quale gli individui percepiscono e valutano il rischio. Gli autori della *Prospect Theory* sostengono che gli individui formulino i propri giudizi confrontando gli esiti ottenuti con un punto di riferimento soggettivo. Quest'ultimo può coincidere con il livello

attuale di ricchezza, con un obiettivo di rendimento, con il prezzo di acquisto di un'attività finanziaria o, più genericamente, con il livello di risultato che l'investitore si aspetta di conseguire.

La presenza di un *reference point* determina una distinzione tra l'area dei guadagni e quella delle perdite, influenzando profondamente il comportamento degli investitori.

L'esistenza di un *reference point* determina una netta distinzione per l'investitore tra l'area dei guadagni e quella delle perdite, nello specifico:

- *Rendimento > Reference Point, zona dei guadagni;*
- *Rendimento < Reference Point, zona delle perdite.*

Come precedentemente illustrato, assume inoltre particolare rilevanza il fenomeno dell'avversione alle perdite, ossia di come una perdita venga percepita come psicologicamente più rilevante rispetto a un guadagno equivalente, facendo così attribuire agli investitori un peso maggiore agli esiti negativi rispetto che a quelli positivi nelle proprie valutazioni.

Conseguentemente, ciò che viene percepito come rischioso non coincide necessariamente con la variabilità complessiva dei rendimenti, bensì con la possibilità che il risultato finale si collochi al di sotto del punto di riferimento considerato dall'investitore.

In contrasto con l'approccio di Markowitz, che considera la deviazione standard come misura della dispersione dei rendimenti rispetto al valore medio, senza distinguere tra scostamenti positivi e negativi, dal punto di vista dell'investitore non tutte le variazioni assumono la medesima rilevanza: un rendimento superiore alle aspettative non viene percepito come una fonte di rischio, bensì come un esito favorevole dell'investimento. Ciò che lo preoccupa maggiormente è invece la possibilità di subire una perdita o di non raggiungere un risultato desiderato.

Ne consegue dunque che la percezione del rischio appare maggiormente legata alla probabilità e all'entità delle perdite piuttosto che alla dispersione complessiva dei rendimenti.

In linea con quanto emerso, a seguito verranno analizzate alcune possibili integrazioni di misure di rischio alternative rispetto agli indicatori tradizionali basati sulla volatilità, con particolare attenzione alle metriche maggiormente coerenti con la percezione soggettiva dell'investitore precedentemente descritta.

III.II.I Downside Risk

Con la tradizionale definizione di deviazione standard precedentemente descritta, il rischio è stato interpretato come sinonimo di incertezza e, si è ritenuto che si manifestasse ogni qualvolta ci si allontanava da un rendimento medio.

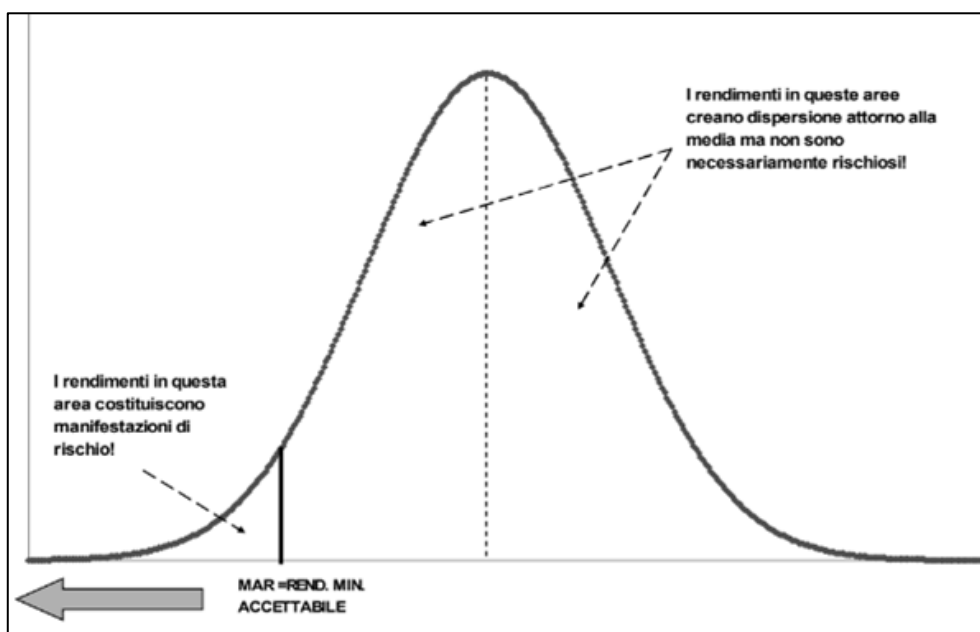
Tuttavia, tale accezione di rischio simmetrico non è l'unica ammissibile. Esistono difatti misure di performance *risk-adjusted* che adottano una visione asimmetrica del rischio, interpretandolo esclusivamente come la possibilità di conseguire rendimenti inferiori ad un determinato livello soglia.

In questa prospettiva, il rischio coincide con il mancato raggiungimento di un rendimento obiettivo, definito come *MAR*, *Minimum Acceptable Return*, il quale presenta natura soggettiva e può variare da un investitore all'altro.

In questo contesto, il parametro statistico della deviazione standard risulta inadeguato, in quanto inefficiente nel distinguere tra scostamenti positivi e negativi rispetto alla media dei rendimenti; attribuendo la medesima rilevanza a rendimenti al di sopra del target, che per l'investitore rappresentano opportunità di guadagno, e a rendimenti inferiori, che invece costituiscono effettive fonti di rischio.

Per meglio descrivere tale impostazione, si consideri la seguente distribuzione normale dei rendimenti:

Figura 3.1 Funzione Normale Downside Risk



Fonte: Volume "Asset management e investitori istituzionali", Braga M.D. et al. (2024)

Come rappresentato nella funzione, data la serie dei possibili rendimenti dell'asset, o di portafoglio, viene posto un limite soglia *MAR* al di sotto del quale i rendimenti vengono classificati come manifestazione di rischio, mentre tutti i rendimenti possibili al di sopra di quel livello soglia sono considerati come valori di dispersione rispetto alla media dei rendimenti, tuttavia non vengono classificate come situazioni rischiose per l'investitore.

Una misura che formalizza esclusivamente tale accezione negativa del rischio è il cosiddetto *Downside Risk*, calcolato tramite la seguente formula:

$$DSR = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (r_t - MAR)^2}{(se\ r_t < MAR) \cdot T - 1}}$$

Dove:

la funzione del *Downside Risk*, *DSR*, è definita come la radice quadrata della media degli scarti tra il rendimento dell'asset al tempo t , r_t , e il *Minimum Acceptable Return*, *MAR*, considerando esclusivamente le osservazioni in cui questo scarto assume un valore negativo, dunque quando il rendimento dell'asset al tempo t , r_t , è inferiore al rendimento minimo accettabile, *MAR*, $r_t < MAR$. Questa procedura consente di isolare la componente sfavorevole della distribuzione dei rendimenti e quantificarne l'incidenza in termini sia di frequenza con cui il raggiungimento del *MAR* è stato compromesso, sia dell'intensità di essa.

La sommatoria degli scarti quadratici negativi viene quindi normalizzata rispetto al numero complessivo delle osservazioni T , oppure come in questo caso per $T-1$ perché si sta lavorando con un campione, in modo da ottenere una misura media della dispersione dei rendimenti al di sotto del rendimento minimo accettabile e così da riuscire a considerare sia la gravità degli scarti quadratici negativi, sia la loro frequenza relativa.

La determinazione del rendimento minimo accettabile presenta una componente intrinsecamente soggettiva, tuttavia, generalmente viene identificato con il rendimento di un *asset risk-free* oppure posto pari a zero.

Tuttavia, in un'ottica comportamentale già discussa nei capitoli precedenti con riferimento alla *Prospect Theory*, la presente tesi si propone di assumere come livello soglia di rendimento accettabile il *reference point* proprio di ciascun investitore, integrando così implicitamente anche il relativo grado di avversione alle perdite.

Con tale prospettiva, la definizione del *MAR* in coerenza con il *reference point* individuale, consente di individuare, per ciascun investitore, una soglia al di sotto della quale i rendimenti vengono effettivamente percepiti come perdite, piuttosto che come semplici scostamenti negativi rispetto ad una media statistica.

Di seguito viene presentato un esempio di confronto tra due asset in termini di *downside risk* e deviazione standard.

- Viene indicato un periodo di osservazione T pari a dieci anni, in questo caso viene utilizzato T anziché $T-1$ perché, trattandosi di un mero caso esemplificativo, si ipotizza di lavorare sull'intera vita dei due asset;
- vengono riportati i rendimenti r dei due asset;
- il rendimento minimo accettabile *MAR* è fissato al 1%;
- vengono infine calcolati gli scarti dal *MAR*.

Tabella 3.1 Downside Risk

<i>Periodo T</i>	<i>r Asset A</i>	<i>r Asset B</i>	<i>MAR</i>	<i>Scarti MAR Asset A</i>	<i>Scarti MAR Asset B</i>
1	12%	6%	1%	11%	5%
2	6%	-2%		5%	-3%
3	-3%	-3%		-4%	-4%
4	-5%	-4%		-6%	-5%
5	2%	1%		1%	0%
6	1%	3%		0%	2%
7	10%	7%		9%	6%
8	8%	-5%		7%	-6%
9	-1%	-2%		-2%	-3%
10	13%	0%		12%	-1%

Fonte: Elaborazione personale

Vengono in seguito calcolati volatilità, o deviazione standard, e *downside risk* per ciascuno dei due asset.

Tabella 3.2 Confronto Volatilità e Downside Risk

Confronto Volatilità		Confronto Downside Risk	
Volatilità asset A	6,40%	DSR Asset A	2,37%
Volatilità asset B	4,12%	DSR Asset B	3,10%

Fonte: Elaborazione personale

Dai risultati ottenuti emerge che, secondo la misura di rischio propria della *Modern Portfolio Theory* di Harry Markowitz, rappresentata dalla volatilità (o deviazione standard), l'asset A presenta una maggiore volatilità rispetto all'asset B. In particolare, la volatilità dell'asset A risulta pari al 6,40%, a fronte del 4,12% registrato dall'asset B, indicando quindi un livello di rischio complessivamente più elevato per il primo.

Tuttavia, considerando un'analisi alternativa basata sul *downside risk*, il quadro risulta differente. Limitando l'attenzione esclusivamente alle variazioni negative del rendimento rispetto a un rendimento minimo accettabile fissato all'1%, emerge che è l'asset B a presentare una performance peggiore, con un valore del 3,10% rispetto al 2,37% dell'asset A.

I risultati evidenziano come la valutazione del rischio dipenda in modo significativo dalla metrica adottata. L'analisi basata sulla volatilità, coerente con l'impostazione teorica di Markowitz, suggerisce che l'asset A presenti un profilo di rischio complessivamente più elevato rispetto all'asset B, in quanto caratterizzato da una maggiore volatilità dei rendimenti. Si ricorda come in questa prospettiva, il rischio viene considerato in termini simmetrici, attribuendo il medesimo peso alle oscillazioni positive e negative rispetto alla media dei rendimenti.

Tuttavia, l'approccio basato sul *downside risk* offre una lettura differente, per certi versi più aderente alla percezione di rischio dell'investitore descritta dalla *Prospect Theory* di Kahneman e Tversky. Si ricorda che, secondo tale impostazione, gli individui tendono a valutare in modo asimmetrico i risultati.

In questo contesto, un indicatore che si focalizza esclusivamente sulle oscillazioni negative rispetto ad un rendimento minimo accettabile (*MAR* pari all'1%) può risultare maggiormente coerente con il modo in cui il rischio viene percepito nella realtà decisionale.

Secondo tale approccio, seppur risultando complessivamente meno volatile secondo la deviazione standard, l'asset B possa comportare una maggiore incidenza di rendimenti inferiori

alla soglia di riferimento rispetto all'asset A, assumendo quindi una connotazione di rischio più rilevante se interpretata in ottica di perdita potenziale.

In conclusione, l'analisi comparata mostra come la classificazione del rischio tra i due asset non sia univoca e vari in funzione dell'indicatore utilizzato. Mentre la deviazione standard privilegia una visione complessiva della variabilità dei rendimenti, il *downside risk* consente di focalizzarsi sulle sole perdite potenziali, offrendo un'informazione complementare che potrebbe risultare maggiormente rappresentativa della percezione soggettiva del rischio da parte dell'investitore.

È tuttavia importante evidenziare i limiti dell'approccio basato sul *downside risk*.

Il principale limite del *downside risk* risiede nella sua instabilità statistica. Poiché viene stimato considerando esclusivamente i rendimenti inferiori a una determinata soglia di riferimento, il numero di osservazioni effettivamente utilizzate risulta inferiore rispetto a quello impiegato per la stima della varianza tradizionale. Ciò può comportare una maggiore sensibilità agli errori di campionamento e una minore robustezza delle stime, soprattutto in presenza di serie storiche limitate.

III.II.II Drawdown

Un ulteriore indicatore che si inserisce nella considerazione asimmetrica del rischio è il *drawdown*, il quale assume particolare rilevanza poiché riesce a cogliere la maggiore sensibilità degli investitori alle perdite rispetto che alle oscillazioni complessive dei rendimenti.

Esso misura difatti la riduzione del valore di un investimento rispetto al massimo storico precedentemente raggiunto all'interno di un dato orizzonte temporale, focalizzandosi dunque su una dimensione più concreta e tangibile per l'investitore.

Per *drawdown* si intende la variazione percentuale negativa riconoscibile attraverso l'osservazione del valore corrente del montante di un investimento, portafoglio o *NAV*, *Net Asset Value*, di un fondo a confronto con il suo precedente valore massimo raggiunto fino a quel momento *t*.

Tale metrica consente di quantificare l'entità delle perdite effettivamente subite dall'investitore durante una fase di ribasso, evidenziando non solo la presenza del rischio ma anche la sua quantificazione reale; concentrandosi esclusivamente sui movimenti sfavorevoli, risulta un indicatore maggiormente coerente con la tesi, sostenuta dalla *Prospect Theory*, che gli individui attribuiscono un peso maggiore alle perdite rispetto ai guadagni di pari entità.

La funzione di *drawdown* è esplicitata dalla seguente formula:

$$DRAWDOWN_t = \min \left[\frac{Montante_t}{\max(Montante_{0..t})} - 1; 0 \right]$$

Dunque:

la funzione di *drawdown* è definita come il valore minimo tra la differenza percentuale del montante al tempo t rispetto al massimo valore registrato fino a tale istante e lo zero.

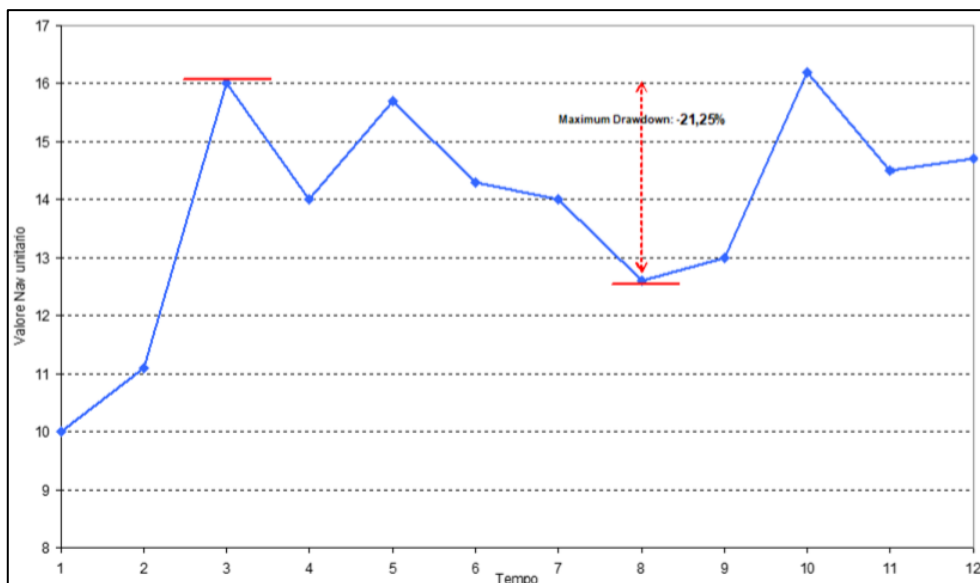
Ne consegue che, in presenza di un investimento caratterizzato da una crescita continua, il montante corrente coinciderà costantemente con il massimo storico aggiornato e, pertanto, il *drawdown* assumerà valore nullo.

Stante la funzione scritta, il valore del *drawdown* è sempre compreso tra zero e un numero negativo: zero quando il valore dell'asset osservato al tempo t è maggiore o uguale al precedente valore massimo raggiunto fino a quel momento e negativo quando il valore dell'asset in t è inferiore al massimo che si era raggiunto in precedenza.

Partendo dalla funzione di *drawdown* è possibile definire anche il *Maximum Drawdown* (*MDD*), il quale rappresenta la massima perdita registrata dal valore dell'investimento rispetto al proprio picco storico, considerando l'intero periodo temporale definito. Tale indicatore sintetizza in un'unica misura la peggiore fase di ribasso subita dall'asset e viene utilizzato frequentemente come misura per il rischio.

Di seguito viene proposto un grafico rappresentativo dell'evoluzione del *NAV* unitario di un asset, ponendo l'enfasi sul *Maximum Drawdown*:

Figura 3.2 Funzione Drawdown



Fonte: Volume "Asset management e investitori istituzionali", Braga M.D. et al. (2024)

Come mostrato nel grafico, i montanti generati dalla serie dei rendimenti storici non devono essere trattati come eventi disgiunti ed indipendenti, bensì come eventi in sequenza, esattamente in linea con la visione dell'investito.

È di fondamentale importanza sottolineare come il concetto di *drawdown* non implichi necessariamente una perdita rispetto al capitale inizialmente investito, esso misura infatti la riduzione del valore dell'investimento rispetto al massimo precedentemente raggiunto, anche quando il capitale originario risulta ancora preservato.

Nel grafico, difatti, si evidenzia come, anche nella fase di massimo *drawdown* raggiunto, pari a $-21,25\%$, non si scenda al di sotto del valore iniziale del *NAV* unitario dell'asset.

In linea con tali prospettive, questo indicatore risulta coerente con la modalità con cui l'investitore percepisce le variazioni del montante, poiché introduce un riferimento dinamico rispetto al quale le perdite vengono valutate. Tale impostazione si collega al concetto di *reference point* proprio della *Prospect Theory*, secondo cui gli esiti non vengono valutati unicamente rispetto al capitale iniziale, bensì rispetto a un livello di riferimento soggettivo; è inoltre coerente con il principio dell'avversione alle perdite, in funzione del quale le riduzioni di valore assumono un peso psicologico maggiore rispetto a variazioni di pari entità con segno opposto.

In questa logica, il *reference point* dell'investitore può risultare dinamico e variare in funzione dell'andamento dell'investimento, con la conseguenza che, per esempio, un incremento del valore dell'asset possa essere erroneamente percepito come un guadagno anche in assenza dell'effettivo realizzo, qualora questo superi il livello di riferimento precedentemente considerato.

In un'ottica coerente con la *Prospect Theory* e con una rappresentazione del rischio maggiormente aderente alla percezione dell'investitore, il *drawdown* potrebbe essere considerato come una possibile funzione obiettivo da minimizzare nella costruzione di portafogli.

Piuttosto che ricorrere a misure di rischio simmetriche, come la varianza, l'attenzione si concentrerebbe su una dinamica asimmetrica di perdite rispetto ai massimi precedentemente raggiunti lungo l'arco temporale dell'investimento, con l'obiettivo di ridurre l'esposizione del portafoglio alle fasi di ribasso, ponendo così come punto di partenza l'effettiva percezione dell'investitore.

Tuttavia, il *drawdown* presenta alcune proprietà che ne complicano l'applicazione pratica nell'ambito dei modelli di ottimizzazione dei portafogli finanziari.

La natura fortemente dipendente dalla sequenza dei rendimenti e dall'evoluzione del montante, se da un lato riconosce al *drawdown* una logica aderente alla visione dell'investitore, costituendo quindi un punto di forza; dall'altro complica l'applicazione pratica nel modello di ottimizzazione. Essendo una funzione *path-dependent*, è determinato non soltanto dai livelli raggiunti dal portafoglio, ma anche dalla sequenza temporale con cui tali livelli si realizzano.

È matematicamente dimostrato come, riordinando causalmente i rendimenti storici e, dunque di conseguenza cambiando l'evoluzione del montante, il *drawdown* restituirà valori differenti. Inoltre, la non linearità della funzione, derivante dalla concatenazione dei montanti, costituisce un ulteriore elemento di complessità nell'ambito della sua applicazione pratica.

Nel successivo capitolo verrà proposto un differente modello di ottimizzazione per la costruzione di un portafoglio finanziario con una logica maggiormente più affine alle percezioni dell'investitore in termini di avversione al rischio e concezione dello stesso. Questo, sarà successivamente confrontato con il modello *Mean Variance Optimization* proposto da Markowitz.

IV. Costruzione Portafoglio Finanziario

Nei capitoli precedenti è stato evidenziato come la volatilità, pur rappresentando la metrica di rischio tradizionalmente utilizzata nell'ambito della teoria moderna di costruzione del portafoglio, non risulti pienamente coerente con la reale percezione degli investitori e di come essi valutino il rischio finanziario.

Ci si è soffermati sul fatto che, nella letteratura successiva alla *Modern Portfolio Theory* di Markowitz, grazie ai contributi della finanza comportamentale, e in particolare nella *Prospect Theory* di Tversky e Kahneman, sia emerso come gli individui attribuiscono maggiore rilevanza alle perdite, anche se potenziali, rispetto che alla semplice variabilità dei rendimenti, manifestando una ben definita avversione alle perdite.

Si è successivamente posta l'ipotesi dell'utilizzo di differenti metriche di rischio per riassumere in modo più coerente l'effettiva percezione dell'investitore del rischio finanziario: sono stati così definiti gli indicatori di *downside risk* e *drawdown*, evidenziandone caratteristiche e limiti applicativi.

Alla luce di quanto emerso nei capitoli precedenti, dunque, si ritiene ragionevole considerare modelli di costruzione del portafoglio che incorporino misure di rischio che si orientano maggiormente alle perdite, più affini quindi alla percezione degli investitori. In quest'ottica, la letteratura finanziaria ha progressivamente sviluppato approcci alternativi al tradizionale modello di ottimizzazione media-varianza, fondati sull'impiego di misure di rischio legate al *drawdown*; tra questi, si colloca il contributo di Chekhlov, Uryasev e Zabarankin, successivamente ripreso ed esteso da elaborati più recenti, tra cui, un lavoro presentato dal dipartimento di statistica dell'università del Wisconsin, con titolo *Constrained Max Drawdown: a Fast and Robust Portfolio Optimization Approach* (2024), al quale il presente elaborato si ispira per la costruzione del modello empirico di ottimizzazione.

Con il presente capitolo, ci si propone dunque di analizzare una formulazione semplificata di un modello di ottimizzazione basato sul *drawdown*, con il fine di verificare se l'adozione di una metrica di rischio maggiormente aderente alla percezione dell'investitore, così come delineata dalla *Prospect Theory*, conduca a risultati differenti rispetto a quelli ottenuti tramite il tradizionale algoritmo di ottimizzazione ideato da Harry Markowitz.

IV.I Modello di ottimizzazione basato sul drawdown

Come precedentemente enunciato, la costruzione del modello analitico trae ispirazione dal contributo proposto nel lavoro *Constrained Max Drawdown: a Fast and Robust Portfolio Optimization Approach* (2024). In tale studio, l'autore sviluppa una formulazione lineare del problema di ottimizzazione del portafoglio fondata sul controllo del *Maximum Drawdown* dato un certo livello di rendimento atteso minimo accettabile, proponendo un approccio in grado di superare alcune delle criticità tipiche dei modelli tradizionali basati sulla volatilità, come la sensibilità delle soluzioni ottimali in relazione alle modifiche dei parametri del modello e la struttura quadratica dello stesso, che rende più complicata la risoluzione rispetto ad un programma lineare.

È opportuno precisare che, il modello implementato nel presente elaborato, pur prendendo spunto dall'impostazione generale proposta dall'articolo dell'università del Wisconsin, adotta una formulazione semplificata dei contributi riconducibili a Chekhlov, Uryasev e Zabarankin, i quali hanno introdotto procedure di ottimizzazione basate sul *drawdown*, optando tuttavia per un modello con obiettivo la massimizzazione del rendimento atteso accettando un dato livello di *maximum drawdown*. Nel presente lavoro, tuttavia, essendosi focalizzati sul ruolo centrale attribuito dalla *Prospect Theory* all'avversione alle perdite dell'investitore, si è ritenuto maggiormente opportuno adottare un approccio inverso, ricercando dunque una minimizzazione del *maximum drawdown*, seppur definito in termini semplificati rispetto alla definizione classica, dato un determinato livello di rendimento atteso accettabile.

L'idea di fondo dell'approccio utilizzato consiste nel considerare il rischio non come dispersione dei rendimenti attorno al valore medio, così come da definizione di deviazione standard, bensì come possibilità di subire una riduzione del capitale posseduto. Il rischio viene considerato in funzione della peggiore perdita registrata nel periodo di osservazione, risultando di conseguenza maggiormente coerente con la percezione dell'investitore emotivo definita dalla finanza comportamentale.

È opportuno precisare nuovamente che il modello implementato nella presente relazione non utilizza la definizione classica di *Maximum Drawdown*, la quale, essendo fortemente dipendente dall'evoluzione temporale del montante (*path dependence*), comporta notevoli complessità dal punto di vista applicativo. Dunque, con l'obiettivo di rendere il problema

trattabile mediante strumenti di ottimizzazione lineare e consentirne l'implementazione in ambiente Excel, si è fatto ricorso ad un assunto di formulazione semplificata.

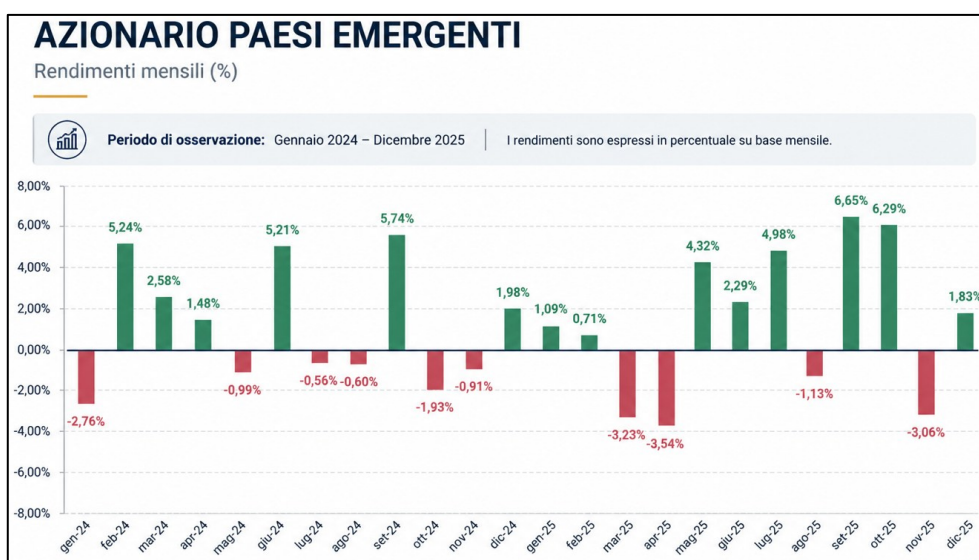
Nello specifico, vengono considerati i rendimenti mensili realizzati dagli asset predefiniti e, si assume come obiettivo quello di minimizzare la peggiore perdita mensile potenzialmente registrabile dal portafoglio.

Operativamente, per ciascun periodo di osservazione viene determinata la combinazione di asset che determinano il rendimento di portafoglio e, successivamente, viene identificato il rendimento mensile meno sfavorevole; viene così ricercata dal modello di ottimizzazione la composizione di asset in grado di minimizzare tale perdita, rendendola il quanto più contenuta possibile all'interno del portafoglio definito.

Fondandosi su una semplificazione rispetto alla tradizionale definizione di *drawdown*, il modello non considera l'evoluzione dinamica del montante del portafoglio nel tempo, bensì ciascun mese viene preso in considerazione separatamente dagli altri, facendo perdere gli effetti derivanti dall'eventuale susseguirsi di più periodi caratterizzati da rendimenti negativi e, così, la caratteristica cumulativa tipica del *drawdown*.

Al fine di illustrare la logica sottostante alla semplificazione adottata, viene riportata di seguito una rappresentazione grafica dei rendimenti mensili dell'asset class *Azionario Paesi Emergenti* nel sottoperiodo 2024-2025.

Figura 4.1 Esempio rendimenti Azionario Mercati Emergenti



Fonte: Elaborazione personale

Come emerge dal grafico, nell'ambito del modello ciascun rendimento mensile viene considerato in maniera autonoma rispetto agli altri periodi di osservazione, prescindendo così

dall'evoluzione dinamica del montante nel tempo. I rendimenti mensili delle singole asset class costituiscono le osservazioni preliminari utilizzate dall'algoritmo di ottimizzazione, il quale individua, la combinazione di asset class nel portafoglio che avrebbe comportato nel corso dell'orizzonte temporale storico considerato il minor evento catastrofico possibile in un singolo periodo (mese). Tuttavia, ponendo quest'ipotesi semplificativa, vengono persi gli effetti cumulativi derivanti dal susseguirsi di più periodi caratterizzati da rendimenti negativi, come nell'esempio relativo alle sequenze luglio-agosto 2024 e marzo-aprile 2025.

Nonostante tale limitazione, l'approccio adottato consente di ottenere una misura del rischio maggiormente focalizzata sulle perdite rispetto alla sola volatilità, mantenendo al contempo una struttura sufficientemente semplice da essere implementata e analizzata empiricamente.

Nella pratica, il modello è stato implementato in ambiente Microsoft Excel mediante l'utilizzo del componente aggiuntivo Risolutore.

Il processo di ottimizzazione prevede la determinazione dei pesi ottimali da attribuire alle asset class considerate, nel rispetto di un insieme di vincoli che riguardano il rendimento atteso del portafoglio, la totale allocazione del capitale disponibile, l'assenza di posizioni “*short selling*” e altri vincoli imposti per garantire il corretto funzionamento del programma.

La formulazione adottata sfrutta una variabile ausiliaria definita come $(R+I)$, dove R rappresenta il rendimento di portafoglio nel periodo considerato. Questo accorgimento matematico consente di operare esclusivamente con valori positivi, evitando le problematiche che il risolutore può presentare in presenza di valori negativi.

Il processo di ottimizzazione appare quindi come una massimizzazione del valore della variabile $Z = \min(Rt) + I$ nel periodo caratterizzato da rendimento peggiore, restituendo così la combinazione di asset in grado di minimizzare il più brutto rendimento (quindi la perdita uniperiodale) in un singolo mese.

Nel paragrafo seguente verrà presentata nel dettaglio la formulazione matematica del modello, illustrandone variabili decisionali, funzione obiettivo e vincoli utilizzati nell'implementazione dell'algoritmo.

IV.I.I Formulazione matematica del modello

Il modello di ottimizzazione viene costruito con l'obiettivo di determinare i pesi ottimali da attribuire alle asset class considerate, al fine di individuare la combinazione di queste in grado di minimizzare la massima perdita mensile potenzialmente registrabile, data una soglia di rendimento atteso richiesto.

Definiti i pesi da assegnare alle N asset class nel portafoglio (w_i) come variabili decisionali dell'algoritmo ed i rendimenti mensili delle singole asset class (R_i), viene introdotta la variabile ausiliaria Z , definita come $Z = R_p + 1$, dove con R_p si identificano le osservazioni dei rendimenti mensili del portafoglio registrati dalla combinazione delle asset class considerate, alle quali si somma un'unità per far operare il risolutore esclusivamente con valori positivi.

La variabile Z viene assunta come funzione obiettivo da massimizzare; il modello ricerca il valore massimo che Z può assumere rispettando i vincoli che verranno elencati in seguito. In questo modo, il risolutore identifica automaticamente il rendimento mensile peggiore del portafoglio e ne minimizza l'entità (dato che i rendimenti negativi vengano trasformati in positivi).

La funzione obiettivo può essere espressa come:

$$\max Z = \max \sum_{i=1}^N (w_i R_i) + 1$$

Porre come obiettivo dell'algoritmo la massimizzazione di questa funzione equivale a ricercare la minor perdita percentuale mensile tra tutti i rendimenti registrati mensilmente delle possibili combinazioni di asset class definito un vincolo minimo di rendimento.

La funzione complementare, quella della minor perdita, o "*drawdown*", mensile, viene definita con la variabile Y , espressa come $Y = Z - 1$; quest'ultima restituirà il valore letto nella sua componente negativa, dunque dell'effettiva perdita mensile massima.

Definite la funzione obiettivo e le variabili decisionali, vengono elencati i vincoli a cui il modello deve sottostare:

- vincolo tecnico (*full investment constraint*): $\sum_{i=1}^N w_i = 1$, la somma dei pesi ottenuti come output finali per le asset class deve rappresentare il 100% del portafoglio;

- vincolo finanziario di diversificazione: $w_i \leq 0.5$, il peso attribuito a ciascuna asset class non può superare il 50% del valore complessivo del portafoglio; questo vincolo viene introdotto per garantire che ci siano almeno 2 asset differenti all'interno del portafoglio;
- vincolo finanziario di rendimento atteso: $R_p \geq \bar{R}$, nell'ambito dell'algoritmo di ottimizzazione, il rendimento del portafoglio ottenuto tramite la ricerca della minor perdita mensile possibile deve avvenire per dato livello di rendimento predefinito $\bar{R}$;
- vincolo tecnico di identificazione della perdita massima: $Z \leq \min(R_{pi}) + 1$, questo vincolo impone alla variabile ausiliaria Z di assumere un valore minore o uguale rispetto a quello discendente dalla quantità rappresentata da $(1 + \text{peggiore rendimento periodico di portafoglio})$ ad ottimizzazione avvenuta. Se non ci fosse questo tipo di vincolo di diseguaglianza, la massimizzazione della variabile ausiliaria Z potrebbe, a titolo esemplificativo, in fase di ottimizzazione essere portare Z a 105%, 110% ma, a quel punto, sarebbe evidente che non si tratterebbe più di valori che, nel passaggio ad Y , sottendono dei *drawdown*. La scrittura del vincolo consente, poi nel passaggio ad Y , al risolutore di identificare il rendimento peggiore tra quelli disponibili, consentendo così di minimizzare la perdita massima potenzialmente registrabile;
- vincolo tecnico (*long-only constraint*): $w_i \geq 0$, il peso associato a ciascuna asset class può assumere esclusivamente valori positivi, maggiori o uguali a zero.

La struttura del modello così definita permette di individuare la composizione di portafoglio che, dato un prefissato livello di rendimento atteso, minimizza la perdita massima mensile potenzialmente registrabile. Nel paragrafo successivo verrà ripreso il modello di Markowitz e si commenterà la parte matematica.

IV.II Modello di ottimizzazione di Markowitz

Come illustrato nel primo capitolo, il modello *Mean Variance Optimization* di Markowitz si pone come obiettivo quello di individuare la composizione di asset nel portafoglio caratterizzata dal livello minimo di rischio, misurato attraverso la deviazione standard dei rendimenti, o volatilità, dato un prefissato livello di rendimento atteso richiesto.

Nel presente capitolo il modello viene ripreso esclusivamente per descriverlo nella sua logica quantitativa e per poterlo successivamente confrontare con il modello di ottimizzazione basato sulla versione semplificata del *drawdown*, verificando se l'adozione di una differente misura di

rischio conduca a composizioni di portafoglio significativamente differenti. Tale confronto assumerà particolare rilevanza alla luce delle considerazioni sviluppate nei capitoli precedenti, nei quali è stato evidenziato come la volatilità non rappresenti pienamente la percezione del rischio da parte degli investitori, risultando pertanto opportuno valutare se, una misura di rischio maggiormente focalizzata sulle perdite, dunque più affine alla percezione dell'investitore delineata dalla *Prospect Theory*, conduca a differenti scelte di allocazione del capitale nel portafoglio.

Visto in un'ottica prettamente analitica, il modello di Markowitz è formulato come un problema di ottimizzazione quadratica, nel quale la funzione obiettivo consiste nella minimizzazione della varianza di portafoglio, nel rispetto di una serie di vincoli che verranno successivamente ripresi.

La funzione obiettivo proposta nella *Mean Variance Optimization* è la seguente:

$$\min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}$$

dove w_i e w_j rappresentano i pesi attribuiti alle N asset class incluse nel portafoglio, mentre σ_{ij} identifica la covarianza tra i rendimenti della coppia di asset class i e j . La presenza della covarianza all'interno della funzione obiettivo ci evidenzia come, nel modello di Markowitz, la rischiosità complessiva del portafoglio non dipenda esclusivamente dalla rischiosità *stand alone* delle singole asset class, bensì viene considerata l'interazione che esiste tra queste ultime. La matrice di covarianza (Σ) consente di riassumere tali relazioni:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \dots & \sigma_{2N} \\ \dots & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}$$

La matrice di covarianza rappresenta uno degli elementi centrali del modello di Markowitz, in quanto consente di sintetizzare il grado di dipendenza esistente tra i rendimenti delle differenti asset class. Tuttavia, sebbene la funzione obiettivo sfrutti le covarianze tra i rendimenti, i benefici derivanti dalla diversificazione vengono generalmente colti attraverso il coefficiente di correlazione (ρ), il quale, assumendo valori compresi tra $[-1 ; +1]$, permette di valutare con maggiore facilità l'intensità e la direzione della relazione tra gli asset considerati; tanto più la

correlazione tra le due asset class risulta bassa o negativa, tanto più elevati saranno i benefici ottenibili in termini di riduzione del rischio complessivo del portafoglio, viceversa, tanto più elevata o positiva risulta la correlazione tra le due asset class, tanto minori saranno i benefici derivanti dalla diversificazione ottenibili attraverso la combinazione di queste all'interno del portafoglio.

Definita la funzione obiettivo ed evidenziato il ruolo della matrice di covarianza e della correlazione nella determinazione del rischio di portafoglio, il modello di Markowitz necessita dell'introduzione di una serie di vincoli, necessari a definire l'algoritmo di ottimizzazione e ad individuare la combinazione efficiente di asset class nel portafoglio.

Vengono di seguito ripresi i vincoli trattati nel primo capitolo:

- vincolo *full investment constraint*: $\sum_{i=1}^N w_i = 1$, così come nel modello precedentemente illustrato, la somma dei pesi attribuiti alle singole asset class deve rappresentare la totalità del portafoglio;
- vincolo *long-only constraint*: $w_i \geq 0$, il peso associato a ciascuna asset class può assumere esclusivamente valori positivi o nulli;
- vincolo finanziario di rendimento atteso: $R_p \geq \bar{R}$, la minimizzazione del rischio deve avvenire per dato livello di rendimento ricercato, che è il medesimo del rendimento richiesto nell'altro modello, così da permettere un confronto coerente.

È inoltre stato aggiunto successivamente il medesimo vincolo del modello basato sul *drawdown* in tema di peso massimo attribuibile alla singola asset class, $w_i \leq 0.5$, così da poter ottenere un portafoglio con almeno due asset class.

Definiti i due modelli oggetto dell'analisi e i relativi vincoli, nel paragrafo seguente verranno descritte le caratteristiche del *dataset* selezionato e le modalità di implementazione empirica adottate ai fini del confronto tra i due modelli.

IV.III Definizione Dataset

Al fine di procedere con l'implementazione empirica dei modelli di ottimizzazione precedentemente descritti e di consentire un confronto coerente tra l'approccio *Mean Variance Optimization* di Markowitz e il modello alternativo basato sul *drawdown*, è stato individuato un *dataset* costituito dai rendimenti storici delle asset class considerate nell'analisi. L'utilizzo

del medesimo campione, riferito al medesimo orizzonte temporale per ambedue le procedure di ottimizzazione, consente di attribuire le eventuali differenze nei risultati esclusivamente alla diversa misura di rischio adottata dai modelli, escludendo dunque l'influenza data dalla difformità delle informazioni e dati di partenza.

Ai fini dell'implementazione empirica, si precisa che entrambi i modelli sono stati sviluppati prendendo in considerazione un investitore che adotta una strategia di tipo *buy and hold*. Si ipotizza dunque che l'investitore determini la composizione ottimale del portafoglio all'inizio dell'orizzonte temporale considerato e la mantenga invariata fino al termine dello stesso, senza effettuare operazioni di *asset allocation* dinamica o modifiche delle allocazioni durante il periodo di investimento. Tale assunzione consente di valutare la performance e il profilo di rischio del portafoglio esclusivamente in funzione della composizione inizialmente individuata dal modello, garantendo inoltre la piena comparabilità tra l'approccio media-varianza e quello basato sul *drawdown*.

Partendo dalle serie storiche mensili delle asset class selezionate, sono stati calcolati i corrispondenti rendimenti mensili ed utilizzati successivamente come input per entrambi i modelli di ottimizzazione.

La scelta di adottare una frequenza mensile risulta coerente con l'impostazione del modello basato sul *drawdown* sviluppato nel presente elaborato, il quale identifica la perdita massima potenzialmente registrabile considerando i rendimenti di portafoglio osservati nei singoli periodi mensili.

I rendimenti così ottenuti sono stati utilizzati nel modello basato sul *drawdown* per individuare, tra tutti i periodi osservati, il rendimento peggiore associato a ciascuna possibile combinazione di portafoglio. Analogamente, i medesimi rendimenti mensili sono stati successivamente elaborati al fine di ricavare i parametri necessari all'implementazione del modello media-varianza, in particolare per l'identificazione del vettore dei rendimenti medi attesi e della matrice di varianza-covarianza delle asset class.

Entrambi i modelli sono stati implementati mediante il componente aggiuntivo Risolutore di Microsoft Excel. Nello specifico, il modello di Markowitz, caratterizzato dalla presenza della matrice di covarianza nella funzione obiettivo, è stato risolto come problema di ottimizzazione

quadratica, mentre il modello basato sul *drawdown* è stato implementato attraverso una formulazione lineare semplificata

In continuità con quanto esposto, il dataset impiegato nell'analisi è costituito dalle serie storiche mensili dei *NAV* unitari relativi alle undici tipologie di asset class selezionate, appartenenti alle principali categorie di investimento presenti nei mercati finanziari. Il campione include strumenti monetari, obbligazionari governativi e corporate, sia dei mercati sviluppati sia dei Paesi emergenti, nonché differenti comparti azionari rappresentativi delle principali aree geografiche mondiali. Tale selezione è stata effettuata al fine di costruire un universo investibile sufficientemente ampio e diversificato, consentendo ai modelli di ottimizzazione di individuare combinazioni di portafoglio caratterizzate da differenti profili di rischio-rendimento.

Di seguito vengono elencate le tipologie di asset class selezionate:

- *Monetario Euro;*
- *Obbligazionario Governativo Euro;*
- *Obbligazionario Governativo USA;*
- *Obbligazionario Corporate Euro;*
- *Obbligazionario Corporate Globale;*
- *Obbligazionario Paesi Emergenti;*
- *Obbligazionario High Yield;*
- *Azionario Europa;*
- *Azionario USA;*
- *Azionario Pacifico;*
- *Azionario Paesi Emergenti.*

Le serie storiche considerate sono costruite da indici finanziari rappresentativi delle diverse asset class selezionate. Le relative valorizzazioni dei *NAV* unitari sono state rilevate con frequenza mensile nell'arco temporale compreso tra gennaio 2001 e dicembre 2025, utilizzando i dati ottenuti attraverso la piattaforma *Refinitiv* e hanno come valuta di riferimento l'euro.

Si è scelto di considerare un orizzonte temporale così ampio al fine di testare il modello di ottimizzazione su un campione che comprenda differenti cicli economici, includendo periodi di espansione, di recessione e di elevata volatilità. Ciò consente inoltre di valutare il comportamento dei due approcci in contesti di mercato eterogenei e di effettuare un confronto maggiormente rappresentativo della loro capacità di individuare portafogli efficienti.

Dopo aver descritto il *dataset* oggetto dell'analisi, nel paragrafo successivo si illustreranno le metodologie adottate per l'implementazione empirica dei due modelli di ottimizzazione, così da fornire le basi per il confronto finale dei risultati ottenuti.

IV.IV Implementazione empirica e descrizione dei modelli di ottimizzazione

Una volta definiti i modelli teorici e descritto il campione utilizzato, si rende necessario illustrare le modalità analitiche attraverso le quali i modelli sono stati implementati. Il presente paragrafo descrive il procedimento seguito per la costruzione delle variabili di input e l'impostazione dei due algoritmi di ottimizzazione mediante il risolutore di Microsoft Excel, evidenziando le principali differenze operative tra il modello *Mean Variance Optimization* teorizzato da Markowitz e il modello basato sul *drawdown* che viene proposto.

Il primo passaggio dell'implementazione empirica comune tra i due algoritmi consiste nella trasformazione delle serie storiche degli indici (*benchmark*) in rendimenti mensili, i quali costituiscono l'input fondamentale per entrambi i modelli di ottimizzazione. I rendimenti sono stati calcolati secondo la generica relazione:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

Dove, il rendimento al tempo t , indicato come R_t , nella casistica in questione rappresenta il rendimento di un indice, il quale è dato dal rapporto tra la variazione della serie storica dell'indice tra due momenti consecutivi e il valore della serie indice più antecedente tra tali due momenti.

Una volta calcolati tutti i rendimenti mensili di ciascun asset class per tutto l'arco temporale preso come riferimento per l'analisi, vengono calcolati i rendimenti medi mensili per ciascuna di esse e riportati nella tabella riassuntiva contenente i principali dati impiegati nell'elaborazione del modello e funzionali alla complessiva analisi dei risultati.

Tabella 4.1 Rendimenti medi mensili

Successivamente, ai fini di entrambi gli algoritmi di ottimizzazione, tali rendimenti verranno ripresi per determinare il rendimento complessivo di portafoglio, ottenuto come somma ponderata dei rendimenti delle singole asset class, in funzione del peso attribuito a ciascuna di esse.

Di seguito verranno proposti i due modelli di ottimizzazione con le loro proprietà e caratteristiche singolari.

MEAN RETURN (MONTHLY) R
0,13%
0,24%
0,23%
0,30%
0,33%
0,54%
0,56%
0,46%
0,56%
0,43%
0,74%

Fonte: Elaborazione personale

IV.IV.I Implementazione caratteristiche modello basato sul drawdown

Ai fini dell'implementazione dell'algoritmo basato sulla logica del *drawdown*, di seguito vengono descritti gli accorgimenti adottati.

Come precedentemente evidenziato nel paragrafo relativo alla definizione del modello, è stato introdotto un accorgimento matematico che consente al risolutore di operare esclusivamente con valori positivi in termini di fattori di rendimento ($R_t + 1$), al fine di limitare eventuali complicanze operative.

È stata dunque definita la variabile ausiliaria Z come il minimo rendimento mensile generato dal portafoglio, ottenuto a partire dalle asset class prese in considerazione e incrementato di un'unità, o 100%, da cui $Z = \min(R_t) + 1$. Questa variabile viene successivamente utilizzata dall'algoritmo come funzione obiettivo da massimizzare, al fine di individuare la combinazione di asset che restituisce il fattore di rendimento che ingloba l'evento catastrofico (quindi negativo o al più nullo) più contenuto possibile così da limitare il *maximum drawdown*. È per questa ragione che tale grandezza obiettivo è sottoposta a vincolo $Z \leq \min(R_{pi}) + 1$.

Essendo la presente tesi focalizzata sull'avversione alle perdite dell'investitore e volta alla ricerca di una nuova concezione di rischio, particolare attenzione viene posta ai casi in cui il fattore di rendimento risulta inferiore alla soglia del 100%, che corrisponde quindi a periodi di rendimento mensile negativo del portafoglio, di cui viene considerato il peggiore. Difatti, viene anche definita la variabile Y (*maximum drawdown* o rendimento minimo ottimale) come $Y = Z - I$, al fine di rappresentare il peggior rendimento possibile, o perdita, associata a quel portafoglio.

Sottostando ai vincoli precedentemente descritti, l'algoritmo restituisce indirettamente la combinazione di asset class che minimizza il *maximum drawdown* mensile, nella sua formulazione semplificata, considerato un dato livello di rendimento richiesto.

Al fine di rendere più chiara l'implementazione de modello, si riporta di seguito un esempio pratico realizzato in Excel, basato sui dati precedentemente definiti.

Viene proposta, come base di partenza casuale prima dell'ottimizzazione, una configurazione dei pesi delle asset class e del valore della funzione obiettivo, nonché variabile Z, come quella raffigurata nella tabella riassuntiva dei risultati.

Figura 4.2 Risultati prima dell'Ottimizzazione

ASSET CLASS	STANDARD DEVIATION (MONTHLY) σ	MEAN RETURN (MONTHLY) R	PORTFOLIO WEIGHTS W_i		
EURO CASH	0,15%	0,13%	10,00%		
EURO GOVERNMENT BOND	1,09%	0,24%	10,00%		
USA GOVERNMENT BOND	2,74%	0,23%	10,00%		
EURO CORPORATE BOND	1,19%	0,30%	10,00%		
GLOBAL CORPORATE BOND	2,60%	0,33%	10,00%		
EMERGING MARKETS BONDS	2,81%	0,54%	10,00%		
HIGH YIELD BONDS	2,82%	0,56%	10,00%		
EUROPEAN EQUITY	4,27%	0,46%	10,00%		
USA EQUITY	4,33%	0,56%	10,00%		
PACIFIC EQUITY	4,03%	0,43%	5,00%		
EMERGING MARKETS EQUITY	5,23%	0,74%	5,00%		
PORTFOLIO	1,91%	0,39%	100,00%	SD annualizzata 6,62%	Rendimento annualizzato 4,73%
CELLA APPOGGIO PER VINCOLO Z ((min Rt)+1)	91,94%				
VINCOLO RENDIMENTO	0,250%	target rendimento		ANNUALIZ.	3,00%
Z VARIABILE OBIETTIVO $y+1$	91,94%				
Y = Z-1 RENDIMENTO MINIMO OTTIMALE	-8,06%	Rendimento minimo del portafoglio ottimale			
MAXIMUM DRAWDOWN	-8,06%				

Fonte: Elaborazione personale

Analizzando i risultati del portafoglio prima dell'ottimizzazione, con la configurazione casuale dei pesi delle asset class, si osserva un *maximum drawdown* mensile pari a -8,06%, a fronte di un rendimento mensile dello 0,25% e di un rendimento annualizzato del 3 %.

L'esempio presentato ha finalità puramente illustrative e mostra una configurazione iniziale casuale dei pesi prima dell'applicazione dell'algoritmo di ottimizzazione, che verrà illustrato in seguito.

Si passa ora all'illustrazione del processo di ottimizzazione e del relativo funzionamento.

Al fine di analizzare il comportamento dell'algoritmo e consentire il successivo confronto con il modello della *Mean Variance Optimization* proposto da Markowitz, vengono ipotizzati due differenti scenari: il primo con un *target* di rendimento richiesto pari al 3% annuo (0,25% mensile), il secondo con un *target* di rendimento annuo pari al 6% (0,5% mensile), di seguito vengono proposti ambedue gli scenari.

Di seguito viene proposto lo scenario con rendimento *target* pari al 3% anno (o 0,25% mensile):

Figura 4.3 Risultati rendimento 3% annuo modello maximum drawdown

ASSET CLASS	STANDARD DEVIATION (MONTHLY) σ	MEAN RETURN (MONTHLY) R	PORTFOLIO WEIGHTS W_i		
EURO CASH	0,15%	0,13%	37,24%		
EURO GOVERNMENT BOND	1,09%	0,24%	14,84%		
USA GOVERNMENT BOND	2,74%	0,23%	22,60%		
EURO CORPORATE BOND	1,19%	0,30%	9,14%		
GLOBAL CORPORATE BOND	2,60%	0,33%	5,33%		
EMERGING MARKETS BONDS	2,81%	0,54%	2,73%		
HIGH YIELD BONDS	2,82%	0,56%	0,00%		
EUROPEAN EQUITY	4,27%	0,46%	0,00%		
USA EQUITY	4,33%	0,56%	0,06%		
PACIFIC EQUITY	4,03%	0,43%	1,86%		
EMERGING MARKETS EQUITY	5,23%	0,74%	6,19%		
PORTFOLIO	1,00%	0,25%	100,00%	SD annualizzata	Rendimento annualizzato
				3,47%	3,00%
CELLA APPOGGIO PER VINCOLO $Z((\min R_t)+1)$	97,77%				
VINCOLO RENDIMENTO	0,250%	target rendimento		ANNUALIZ.	3,00%
Z VARIABILE OBIETTIVO $y+1$	97,77%				
$Y = Z - 1$ RENDIMENTO MINIMO OTTIMALE	-2,23%	minimo del portafoglio ottimale			
MAXIMUM DRAWDOWN	-2,23%				

Fonte: Elaborazione personale

Analizzando lo scenario caratterizzato da un rendimento richiesto pari a 0,25% mensile (3% annuo), si osserva come l'algoritmo restituisca un portafoglio prevalentemente sovrappesato su asset class caratterizzate da rendimenti mediamente più contenuti e da una volatilità ridotta (*Euro Cash*, *Euro Government Bond*, *USA Government Bond* e *Euro Corporate Bond*), ne deriva dunque una volatilità di portafoglio pari all'1% mensile (e 3,47% su base annua).

Tuttavia, come anticipato, l'elemento centrale dell'analisi non è la volatilità, bensì la misurazione del rischio attraverso il *maximum drawdown* mensile di portafoglio.

Secondo tale obiettivo, il modello evidenzia come, a fronte di un target di rendimento relativamente contenuto, la costruzione del portafoglio tenda a privilegiare asset class meno rischiose, con l'obiettivo di ridurre l'esposizione alle perdite estreme.

Come emerge dai risultati, il *maximum drawdown* mensile associato a tale combinazione di asset class è pari a -2,23%. Tale valore rappresenta la massima perdita mensile registrata dal portafoglio nell'intero periodo di analisi, pari a 25 anni, e costituisce quindi la misura più rilevante del rischio secondo la logica del modello.

Il risultato evidenzia come, in presenza di un vincolo di rendimento moderato, l'algoritmo sia in grado di orientare l'allocazione verso asset con un rischio di perdita contenuto, riducendo conseguentemente in modo significativo l'entità del *maximum drawdown* rispetto a portafogli più aggressivi.

Si procede ora all'analisi del secondo scenario, caratterizzato da un rendimento *target* pari al 6% annuo (0,5% mensile), superiore rispetto a quello precedentemente esaminato.

Figura 4.4 Risultati rendimento 6% annuo modello maximum drawdown

ASSET CLASS	STANDARD DEVIATION (MONTHLY) σ	MEAN RETURN (MONTHLY) R	PORTFOLIO WEIGHTS w_i		
EURO CASH	0,15%	0,13%	0,00%		
EURO GOVERNMENT BOND	1,09%	0,24%	0,37%		
USA GOVERNMENT BOND	2,74%	0,23%	17,09%		
EURO CORPORATE BOND	1,19%	0,30%	0,04%		
GLOBAL CORPORATE BOND	2,60%	0,33%	4,59%		
EMERGING MARKETS BONDS	2,81%	0,54%	14,01%		
HIGH YIELD BONDS	2,82%	0,56%	16,85%		
EUROPEAN EQUITY	4,27%	0,46%	4,97%		
USA EQUITY	4,33%	0,56%	27,22%		
PACIFIC EQUITY	4,03%	0,43%	4,36%		
EMERGING MARKETS EQUITY	5,23%	0,74%	10,49%		
PORTFOLIO	2,77%	0,50%	100,00%	SD annualizzata 9,59%	Rendimento annualizzato 6,00%
CELLA APPOGGIO PER VINCOLO Z ((min Rt)+1)	89,73%				
VINCOLO RENDIMENTO	0,500%	target rendimento		ANNUALIZ.	6,00%
Z VARIABILE OBIETTIVO y+1	89,73%				
Y = Z-1 RENDIMENTO MINIMO OTTIMALE	-10,27%	minimo del portafoglio ottimale			
MAXIMUM DRAWDOWN	-10,27%				

Fonte: Elaborazione personale

Analizzando lo scenario caratterizzato da un rendimento *target* pari allo 0,5% mensile (6% annuo), si osserva come l'algoritmo modifichi sensibilmente la composizione del portafoglio rispetto al caso precedente, introducendo una maggiore esposizione verso asset class caratterizzate da rendimenti attesi più elevati e, conseguentemente, da una maggiore volatilità (*USA Equity*, *High Yield Bond*, *Emerging Market Bond*), pur mantenendo parte della concentrazione anche nel *USA Government Bond*.

Dunque, al fine di soddisfare il vincolo di rendimento imposto, si riduce sensibilmente il peso delle componenti obbligazionarie più difensive in favore di asset class più rischiose, assumendosi conseguentemente un rischio superiore di portafoglio.

In termini di rischio secondo Markowitz, la volatilità di portafoglio risulta infatti superiore rispetto allo scenario precedente, in questo caso si attesta a circa un 2,77% mensile (e 9,59% su base annua), riflettendo un'allocazione di portafoglio più aggressiva.

Considerando invece il *maximum drawdown* mensile come elemento d'indagine primaria, chiaramente anche in quest'ottica di rischio si evidenziano dei risultati ben differenti rispetto al primo esempio.

Dai risultati ottenuti si osserva come il *maximum drawdown* mensile aumenti in modo significativo rispetto al caso precedente, raggiungendo livelli più elevati di perdita potenziale, fino a raggiungere un -10,27% nel peggior periodo di osservazione.

Tuttavia, è necessario sottolineare che questi risultati non possano essere analizzati in maniera isolata, bensì, per garantirne una corretta interpretazione, è necessario confrontarli con quelli che saranno successivamente derivanti dall'applicazione del modello di Markowitz, a parità di

dataset utilizzato, arco temporale e rendimento target richiesto. Esclusivamente attraverso tale confronto sarà possibile valutare in modo coerente le differenze tra le due metodologie in termini di allocazione ottimale del capitale e misurazione del rischio percepito dall'investitore. Tale confronto assumerà particolare rilevanza alla luce della *Prospect Theory*, secondo la quale gli investitori presentano un'avversione alle perdite superiore rispetto alla propensione verso i guadagni di pari entità. Ne consegue che l'efficacia di una misura di rischio maggiormente aderente alla percezione soggettiva dell'investitore dovrà essere valutata proprio in relazione all'impostazione tradizionale di Markowitz, al fine di evidenziarne eventuali vantaggi o limiti.

La sezione successiva sarà pertanto dedicata all'implementazione empirica del modello di Markowitz, al fine di consentire un successivo confronto dei risultati ottenuti in termini di allocazione ottimale del capitale e misure di rischio.

IV.IV.II Implementazione caratteristiche modello di Markowitz

Ai fini dell'implementazione del modello *Mean Variance Optimization* di Markowitz, di seguito vengono descritte analiticamente le procedure utilizzate per la valutazione del rischio, inteso come deviazione standard, del portafoglio.

Viene definita quindi la matrice di covarianza per definire le relazioni esistenti tra le diverse asset class, seguendo la seguente formula:

$$Cov_{A,B} = \frac{1}{T-1} * \sum_{t=1}^T \left((R_{A,t} - \overline{R_A}) * (R_{B,t} - \overline{R_B}) \right)$$

Dove, vengono calcolati gli scarti periodici tra i rendimenti al tempo t dei due asset A e B rispetto alla loro media, $R_{A,t} - \overline{R_A}$ e $R_{B,t} - \overline{R_B}$, e la sommatoria del prodotto di questi viene divisa per $T - 1$, dove T rappresenta i periodi di osservazione totali, a cui viene levata un'unità per correggere i gradi di libertà associati alla stima della covarianza.

La tabella delle covarianze che si ottiene per tutte le dodici asset class considerate è la seguente:

Tabella 4.2 Matrice Covarianze Asset Class

MONTHLY COVARIANCE MATRIX (2001-2025)	EURO CASH	EURO GOVERNMENT BOND	USA GOVERNMENT BOND	EURO CORPORATE BOND	GLOBAL CORPORATE BOND	EMERGING MARKETS BONDS	HIGH YIELD BONDS	EUROPEAN EQUITY	USA EQUITY	PACIFIC EQUITY	EMERGING MARKETS EQUITY
EURO CASH	0,0000021	0,000002	0,000001	0,000001	-0,000002	-0,000001	-0,000004	-0,000009	-0,000011	-0,000009	-0,000005
EURO GOVERNMENT BOND	0,0000023	0,0001191	0,000093	0,000105	0,000106	0,000119	0,000064	0,000020	0,000039	0,000051	0,000023
USA GOVERNMENT BOND	0,0000009	0,0000934	0,0007507	0,000011	0,000634	0,000459	0,000280	-0,000247	0,000142	0,000075	-0,000200
EURO CORPORATE BOND	0,0000007	0,0001051	0,000107	0,0001422	0,000099	0,000150	0,000150	0,000191	0,000166	0,000181	0,000219
GLOBAL CORPORATE BOND	-0,0000017	0,0001061	0,0006335	0,0000994	0,0006758	0,000590	0,000501	0,000113	0,000457	0,000363	0,000209
EMERGING MARKETS BONDS	-0,0000006	0,0001188	0,0004586	0,0001501	0,0005896	0,0007870	0,000684	0,000454	0,000693	0,000594	0,000699
HIGH YIELD BONDS	-0,0000037	0,0000635	0,0002800	0,0001500	0,0005012	0,0006845	0,0007932	0,000670	0,000858	0,000726	0,000890
EUROPEAN EQUITY	-0,0000094	0,0000198	-0,0002470	0,0001911	0,0001129	0,0004539	0,0006698	0,0018130	0,001487	0,001245	0,001649
USA EQUITY	-0,0000108	0,0000387	0,0001418	0,0001657	0,0004570	0,0006928	0,0008584	0,0014865	0,0018669	0,001290	0,001548
PACIFIC EQUITY	-0,0000088	0,0000506	0,0000745	0,0001807	0,0003634	0,0005941	0,0007257	0,0012455	0,0012895	0,0016168	0,001534
EMERGING MARKETS EQUITY	-0,0000047	0,0000232	-0,0002000	0,0002192	0,0002094	0,0006985	0,0008901	0,0016489	0,0015479	0,0015345	0,00272600

Fonte: Elaborazione personale

Una volta determinate le covarianze esistenti tra le differenti asset class, viene richiamata la definizione del rischio di portafoglio secondo il modello di Markowitz, precedentemente analizzata nel terzo capitolo. Tale formulazione rappresenta il fondamento teorico del modello di ottimizzazione adottato nel presente lavoro, i cui risultati saranno illustrati e analizzati nelle simulazioni riportate in seguito.

$$\sigma_p = \sqrt{2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}}$$

Definito il modello di ottimizzazione e la caratteristica modalità di individuazione del rischio secondo l'approccio di Markowitz, si procede ora all'analisi del relativo funzionamento dell'algoritmo mediante le medesime casistiche considerate per il modello basato sulla minimizzazione del *maximum drawdown*. Al fine di rendere i risultati pienamente confrontabili, vengono dunque mantenuti invariati sia il campione storico sia l'insieme delle asset class considerate, nonché i due livelli di rendimento *target* introdotti al fine del confronto: il 3% annuo (0,25% mensile) e il 6% annuo (0,5% mensile).

L'impiego dei medesimi scenari sperimentali garantisce l'omogeneità delle condizioni di analisi, consentendo di attribuire le eventuali differenze nei risultati esclusivamente alla differente metodologia di ottimizzazione adottata. Tale approccio costituisce il presupposto metodologico per il successivo confronto tra i portafogli generati dai due modelli, finalizzato ad evidenziarne le differenti caratteristiche in termini di allocazione degli investimenti e di esposizione al rischio, secondo le due differenti concezioni.

Viene in seguito proposto il risultato dell'ottimizzazione rispetto al primo dei due scenari considerati, quello con *target* di rendimento pari a circa il 3% annuo (0,25% mensile).

Figura 4.5 Risultati rendimento 3% annuo modello Markowitz

ASSET CLASS	STANDARD DEVIATION (MONTHLY)	MEAN RETURN (MONTHLY)	PORTFOLIO WEIGHTS		
EURO CASH	0,15%	0,13%	50,00%		
EURO GOVERNMENT BOND	1,09%	0,24%	18,50%		
USA GOVERNMENT BOND	2,74%	0,23%	0,00%		
EURO CORPORATE BOND	1,19%	0,30%	15,48%		
GLOBAL CORPORATE BOND	2,60%	0,33%	0,00%		
EMERGING MARKETS BONDS	2,81%	0,54%	0,00%		
HIGH YIELD BONDS	2,82%	0,56%	13,39%		
EUROPEAN EQUITY	4,27%	0,46%	0,00%		
USA EQUITY	4,33%	0,56%	0,00%		
PACIFIC EQUITY	4,03%	0,43%	0,00%		
EMERGING MARKETS EQUITY	5,23%	0,74%	2,63%		
				SD annualizzata	Rendimento annualizzato
PORTFOLIO	0,69%	0,25%	100,00%	2,39%	3,00%
CELLA APPOGGIO PER VINCOLO Z ((min Rt)+1)	96,20%				
VINCOLO RENDIMENTO	0,250%	target rendimento		ANNUALIZ.	3,00%
Z VARIABILE OBIETTIVO y+1	96,20%				
Y = Z-1 RENDIMENTO MINIMO OTTIMALE	-3,80%	minimo del portafoglio ottimale			
MAXIMUM DRAWDOWN	-3,80%				

Fonte: Elaborazione personale

Analizzando lo scenario caratterizzato da un rendimento richiesto pari a 0,25% mensile (3% annuo), si osserva come l'algoritmo di Markowitz restituisca, anche in questo caso, un portafoglio prevalentemente sovrappesato su asset class caratterizzate da rendimenti mediamente più contenuti e da una volatilità ridotta, tuttavia emergono fin da subito delle differenze di allocazione rispetto al modello precedente (*Euro Cash*, *Euro Government Bond*, *Euro Corporate Bond* e *High Yield Bonds*); nonostante queste differenze, ne deriva comunque una volatilità di portafoglio ridotta, pari allo 0,69% mensile (e 2,39% su base annua).

Il modello evidenzia come, a fronte di un *target* di rendimento relativamente contenuto, la costruzione del portafoglio tenda a privilegiare asset class meno rischiose, considerando tuttavia una metrica di rischio obiettivo differente.

Considerando invece la misurazione del rischio oggetto di tesi, il *maximum drawdown* mensile di portafoglio, emergono i seguenti risultati.

Il *maximum drawdown* mensile associato a tale combinazione di asset class, individuata tramite l'algoritmo di Markowitz, è pari a -3,8%. Anche in questa circostanza, questo valore rappresenta la massima perdita mensile registrata dal portafoglio nell'intero periodo di analisi, pari a 25 anni.

I risultati del modello evidenziano come, in presenza di un vincolo di rendimento moderato, il differente algoritmo orienti l'allocazione delle risorse verso asset a bassa volatilità, dunque con qualche differenza rispetto al modello orientato alla minimizzazione del *maximum drawdown*.

Si continua di seguito con l'analisi dei risultati ottenuti rispetto al secondo scenario considerato, quello con rendimento *target* superiore a quello esaminato tuttora, pari al 6% annuo (0,5% mensile).

Figura 4.6 Risultati rendimento 6% annuo modello Markowitz

ASSET CLASS	STANDARD DEVIATION (MONTHLY)	MEAN RETURN (MONTHLY)	PORTFOLIO WEIGHTS		
EURO CASH	0,15%	0,13%	0,00%		
EURO GOVERNMENT BOND	1,09%	0,24%	0,00%		
USA GOVERNMENT BOND	2,74%	0,23%	0,00%		
EURO CORPORATE BOND	1,19%	0,30%	30,39%		
GLOBAL CORPORATE BOND	2,60%	0,33%	0,00%		
EMERGING MARKETS BONDS	2,81%	0,54%	22,98%		
HIGH YIELD BONDS	2,82%	0,56%	34,02%		
EUROPEAN EQUITY	4,27%	0,46%	0,00%		
USA EQUITY	4,33%	0,56%	0,00%		
PACIFIC EQUITY	4,03%	0,43%	0,00%		
EMERGING MARKETS EQUITY	5,23%	0,74%	12,61%		
				SD annualizzata	Rendimento annualizzato
PORTFOLIO	2,20%	0,50%	100,00%	7,61%	6,00%
CELLA APPOGGIO PER VINCOLO $Z((\min Rt)+1)$	88,35%				
VINCOLO RENDIMENTO	0,500%	target rendimento		ANNUALIZ.	6,00%
Z VARIABILE OBIETTIVO $y+1$	88,35%				
Y = Z-1 RENDIMENTO MINIMO OTTIMALE	-11,65%	minimo del portafoglio ottimale			
MAXIMUM DRAWDOWN	-11,65%				

Fonte: Elaborazione personale

Analizzando lo scenario con vincolo rendimento superiore, pari allo 0,5% mensile (6% annuo), si osserva come l'algoritmo modifichi la composizione del portafoglio rispetto al caso precedente, introducendo una maggiore esposizione verso asset class caratterizzate da rendimenti attesi più elevati, con corrispondente maggiore volatilità (*Euro Corporate Bond*, *High Yield Bond*, *Emerging Market Bond* e una parte in *Emerging Markets Equity*).

Come previsto, al fine di soddisfare il vincolo di rendimento superiore imposto, il modello restituisce conseguentemente una combinazione di asset class con volatilità più elevata.

In termini di rischio, la volatilità di portafoglio risulta superiore rispetto allo scenario precedente, circa un 2,2% mensile (e 7,61% su base annua), riflettendo un'allocazione di portafoglio più aggressiva.

Considerando invece il *maximum drawdown* mensile, anche in quest'ottica di rischio si evidenziano dei risultati ben differenti rispetto al primo esempio.

L'algoritmo di Markowitz restituisce un *maximum drawdown* mensile incrementato in modo significativo rispetto al caso precedente, raggiungendo livelli più elevati di perdita potenziale, fino a raggiungere un -11,65% nel peggior periodo di osservazione.

I risultati ottenuti costituiscono pertanto la base per il successivo confronto con quelli derivanti dal modello di ottimizzazione fondato sulla minimizzazione del *maximum drawdown*.

Nel paragrafo seguente verrà sviluppata un'analisi comparata dei risultati dei due algoritmi, al fine di evidenziarne le principali differenze in termini di composizione dei portafogli, misurazione del rischio e implicazioni nell'ambito delle scelte di allocazione.

IV.V Confronto dei risultati dei due modelli di ottimizzazione

Il presente paragrafo è dedicato all'analisi comparata dei risultati ottenuti attraverso i due modelli di ottimizzazione considerati nel presente lavoro: il modello tradizionale di *Mean Variance Optimization* proposto da Markowitz e il modello proposto dal seguente elaborato, basato sulla minimizzazione del *maximum drawdown*, sviluppato nell'ottica di rappresentare in modo più aderente la percezione soggettiva del rischio da parte dell'investitore.

L'obiettivo dell'analisi è quello di valutare la coerenza e l'efficacia dei due approcci rispetto alle differenti concezioni di rischio proposte, dalla deviazione standard secondo Markowitz, alla reale concezione di rischio evidenziata dalla letteratura comportamentale, con particolare riferimento alla *Prospect Theory* e al concetto di avversione alle perdite. In quest'ultima prospettiva, il rischio non è inteso esclusivamente come variabilità dei rendimenti, bensì come esposizione a perdite effettive rispetto ad un *reference point*.

Il confronto tra i due modelli assumerà valenza non soltanto quantitativa, bensì anche interpretativa, in quanto consentirà di valutare successivamente in che misura le diverse funzioni obiettivo siano in grado di riflettere una nozione di rischio più vicina al comportamento osservato degli investitori.

L'analisi dei risultati ottenuti nei paragrafi precedenti consente di mettere a confronto le soluzioni fornite dai due modelli di ottimizzazione a parità di condizioni e richieste iniziali, evidenziando come la diversa definizione di rischio adottata influenzi significativamente la composizione dei portafogli e le relative caratteristiche di rischio-rendimento.

A partire da tali premesse, verranno analizzati i risultati ottenuti in termini di composizione dei portafogli e misure di rischio associate, al fine di evidenziare le differenze strutturali tra i due modelli e valutarne in seguito la capacità di rappresentare in modo coerente le preferenze degli investitori caratterizzate da avversione alle perdite.

Di seguito vengono proposte le diverse allocazioni del capitale all'interno del portafoglio e i risultati ottenuti tramite l'utilizzo dei due differenti algoritmi di ottimizzazione per quanto

riguarda il rendimento *target* richiesto pari a 3% annuo (0,25% mensile) al fine di commentare in seguito i differenti risultati ottenuti.

Inizialmente vengono evidenziate le differenti composizioni dei portafogli generati dai due modelli di ottimizzazione, per semplicità vengono considerate solo le asset class a cui viene corrisposto un peso superiore a 3% del totale.

Tabella 4.3 Port. Modello Min MaxDD, Rend. 3%

ASSET CLASS	PORTFOLIO WEIGHTS w_i
EURO CASH	37,24%
EURO GOVERNMENT BOND	14,84%
USA GOVERNMENT BOND	22,59%
EURO CORPORATE BOND	9,14%
GLOBAL CORPORATE BOND	5,34%
EMERGING MARKETS EQUITY	6,19%

Fonte: Elaborazione personale

Tabella 4.4 Port. Modello Markowitz, Rend. 3%

ASSET CLASS	PORTFOLIO WEIGHTS w_i
EURO CASH	50,00%
EURO GOVERNMENT BOND	18,50%
EURO CORPORATE BOND	15,48%
HIGH YIELD BONDS	13,39%

Fonte: Elaborazione personale

Con riferimento alla composizione del portafoglio nel primo scenario, emergono differenze sostanziali tra i risultati ottenuti tramite i due modelli di ottimizzazione.

- Il modello basato sulla minimizzazione del *maximum drawdown* (tabella di sinistra), individua la combinazione di asset class che consente di ridurre la massima perdita mensile registrata dal portafoglio nell'intero orizzonte temporale considerato. La costruzione del portafoglio è pertanto guidata dalla valutazione delle perdite storiche effettive, o rendimenti mensili negativi, delle singole asset class e delle loro interazioni, privilegiando quelle combinazioni in grado di contenere gli episodi di perdita più gravosi.
- Il modello di Markowitz (tabella di destra), determina l'allocazione ottimale delle risorse sulla base della matrice di covarianza dei rendimenti, combinando asset class che minimizzano la volatilità complessiva del portafoglio. Di conseguenza, possono essere incluse anche attività che hanno sperimentato perdite massime particolarmente elevate nel periodo analizzato, purché il loro contributo alla varianza complessiva risulti contenuto grazie ai benefici derivanti dalla diversificazione e dalle correlazioni con le altre componenti del portafoglio.

Confrontando le due composizioni dei portafogli emerge che, sebbene entrambi i modelli, dato un rendimento *target* pari al 3% annuo (0,25% mensile), tendano a costruire un portafoglio concentrato maggiormente nell'asset monetario *Euro Cash* e in asset obbligazionari, si può notare, in primis, il differente numero delle asset class presenti all'interno del portafoglio, con il portafoglio ottenuto tramite l'algoritmo di ottimizzazione di Markowitz che è composto da un numero di asset inferiore rispetto a quello ottenuto tramite il modello basato sulla minimizzazione del *maximum drawdown*. Un'ulteriore differenza risulta sicuramente l'introduzione di un asset class quale l'*Emerging Markets Equity* all'interno del portafoglio costruito sulla base del *maximum drawdown*. Questo asset, definito il vincolo di rendimento richiesto, non rientra all'interno del portafoglio costruito diversamente in quanto, per definizione, si ricerca la composizione di asset class al fine di ottenere il portafoglio con minor volatilità possibile. Dunque, in questo primo esempio, si evidenzia come la differente concezione del rischio comporti una differente allocazione delle risorse nelle rispettive asset class, ottenendo dunque due portafogli differenti.

Considerando dunque proprio le due differenti metriche del rischio, dato il medesimo rendimento richiesto, 3% annuo (0,25% mensile), si evidenziano i seguenti risultati:

Tabella 4.5 Confronto Metriche di Rischio, Rendimento 3% annuo

Metriche di Rischio	Port. Modello Max DD	Port. Modello Markowitz
Deviazione standard	1% mensile; 3,47% annua	0,69% mensile; 2,39% annua
Maximum Drawdown	-2,23% mensile	-3,80% mensile

Fonte: Elaborazione personale

Restituendo due composizioni di portafoglio differenti, i risultati delle metriche di rischio ottenuti sono conseguentemente differenti.

Il modello basato sulla minimizzazione del *maximum drawdown* mensile risulta avere una volatilità, o deviazione standard, complessivamente maggiore rispetto a quella del portafoglio ottenuto secondo il modello di Markowitz, il quale ha come obiettivo proprio la minimizzazione di tale indicatore.

Tuttavia, cambiando la metrica di rischio considerata, i risultati vengono ribaltati, difatti l'ottimizzazione di Markowitz restituisce il portafoglio con *maximum drawdown* più elevato rispetto all'altro portafoglio, costruito differentemente.

Dai risultati emerge come la minimizzazione della volatilità non comporti necessariamente una contestuale riduzione della perdita massima potenzialmente sperimentabile dall'investitore. Al contrario, il modello sviluppato nel presente elaborato restituisce una volatilità, o deviazione standard, di portafoglio leggermente superiore, al fine di contenere proprio quella componente del rischio che, secondo la *Prospect Theory*, assume una maggiore rilevanza psicologica.

Un risultato analogo emerge anche nel secondo scenario, caratterizzato da un rendimento *target* pari al 6% annuo (0,5% mensile). Definite le differenti concezioni di rischio e obiettivi dei modelli, vengono presentati nel medesimo modo i risultati ottenuti nel secondo scenario, partendo dall'*asset allocation* e proseguendo con la quantificazione del rischio secondo le differenti metriche considerate.

Di seguito vengono presentate le differenti composizioni dei portafogli, secondo il *target* di rendimento del secondo scenario.

Tabella 4.6 Port. Modello Min MaxDD, Rend. 6%

ASSET CLASS	PORTFOLIO WEIGHTS W_i
USA GOVERNMENT BOND	17,09%
GLOBAL CORPORATE BOND	4,59%
EMERGING MARKETS BONDS	14,01%
HIGH YIELD BONDS	16,85%
EUROPEAN EQUITY	4,97%
USA EQUITY	27,22%
PACIFIC EQUITY	4,36%
EMERGING MARKETS EQUITY	10,49%

Fonte: Elaborazione personale

Tabella 4.7 Port. Modello Markowitz, Rend. 6%

ASSET CLASS	PORTFOLIO WEIGHTS W_i
EURO CORPORATE BOND	30,39%
EMERGING MARKETS BONDS	22,98%
HIGH YIELD BONDS	34,02%
EMERGING MARKETS EQUITY	12,61%

Fonte: Elaborazione personale

Entrambi i modelli, al fine di soddisfare il vincolo di rendimento più elevato, pari a 6% annuo (0,5% mensile), incrementano l'esposizione verso asset class maggiormente rischiose, determinando un aumento sia della volatilità, o deviazione standard, sia delle perdite potenziali. Tuttavia, come evidenziato anche nello scenario precedente, i criteri attraverso cui tali asset vengono selezionati rimangono profondamente differenti e, conseguentemente, anche i risultati ottenuti in termini di *asset allocation*.

Anche in questo esempio si nota come, il numero delle asset class all'interno del portafoglio costruito secondo il modello proposto nell'elaborato risulta superiore rispetto a quello proposto dall'ottimizzazione secondo Markowitz e, seppur entrambi i modelli si orientino verso asset

maggiormente rischiosi, il modello proposto alloca una buona parte dell'ipotetico capitale investito all'interno delle asset class che rientrano nella macro categoria degli asset azionari, comunemente visti come maggiormente rischiosi o, secondo Markowitz, più volatili.

Tale differenza metodologica si riflette chiaramente anche nei risultati empirici, nei quali, il modello proposto consegue una riduzione del *maximum drawdown* a fronte di una volatilità leggermente superiore rispetto a quella ottenuta mediante l'approccio media-varianza.

Di seguito vengono proposti i risultati in forma tabellare.

Tabella 4.8 Confronto Metriche di Rischio, Rendimento 6% annuo

Metriche di Rischio	Port. Modello Max DD	Port. Modello Markowitz
Deviazione standard	2,77% mensile; 9,59% annua	2,2% mensile; 7,61% annua
Maximum Drawdown	-10,27% mensile	-11,65% mensile

Fonte: Elaborazione personale

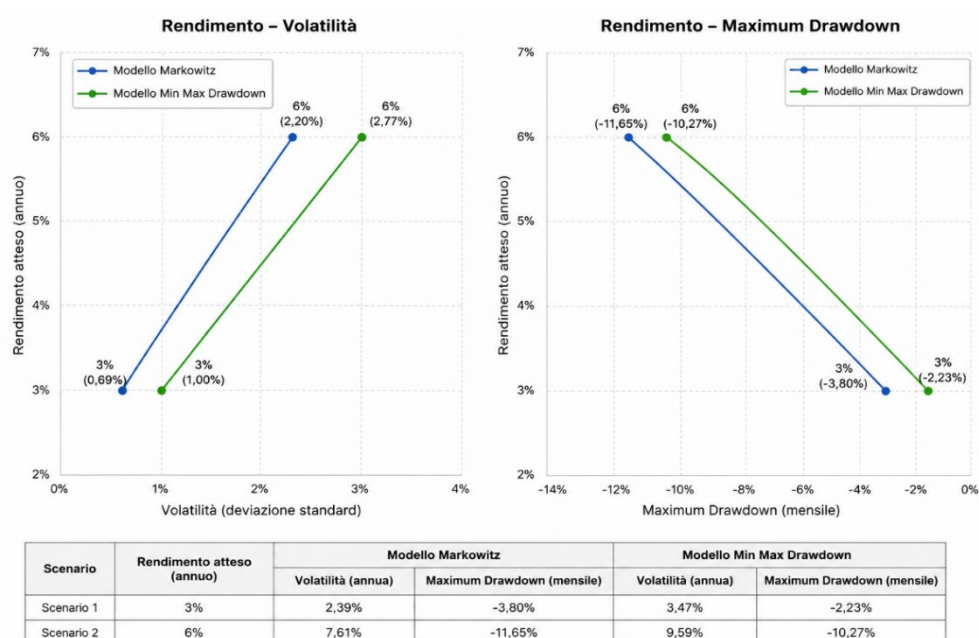
Dalla tabella si evince nuovamente come, il modello basato sul *maximum drawdown*, privilegiando le combinazioni di asset che consentono di limitare la perdita massima complessiva del portafoglio lungo l'intero periodo di osservazione, accetta un livello di volatilità superiore rispetto al modello di Markowitz.

Contrariamente, il modello basato sull'ottimizzazione media-varianza, ricercando esclusivamente la combinazione di asset class che minimizza la varianza, a parità di rendimento atteso, restituisce una perdita estrema mensile, o *maximum drawdown* periodale, maggiore.

Il portafoglio risultante, dunque, può includere asset class caratterizzate da *drawdown* storicamente elevati, purché il loro inserimento contribuisca a ridurre la volatilità complessiva di portafoglio grazie al legame esistente tra di esse.

Di seguito vengono proposti due grafici, rendimento-volatilità e rendimento-*maximum drawdown*, riassuntivi dei risultati ottenuti da ciascun algoritmo di ottimizzazione per entrambi gli scenari presentati.

Figura 4.7 Confronto Grafico Metriche di Rischio



Fonte: Elaborazione personale

Un ulteriore elemento di interesse che è stato esaminato riguarda il periodo storico nel quale i due portafogli avrebbero registrato il proprio *maximum drawdown*. Dall'analisi empirica emerge come i portafogli ottenuti mediante il modello di ottimizzazione proposto nel seguente elaborato, sperimentino la propria perdita periodale massima, in ambedue i livelli di rendimento target richiesto, nel giugno 2002; mentre i portafogli costruiti secondo l'approccio di ottimizzazione di Markowitz registrano invece il loro peggior risultato in termini di massima perdita mensile, in entrambi gli scenari proposti, nel marzo 2020.

Tale differenza conferma come la diversa filosofia sottostante alla funzione obiettivo adottata dai due modelli e le conseguenti composizioni dei portafogli, non influenzino esclusivamente l'entità della perdita massima, bensì anche la natura degli eventi di mercato ai quali il portafoglio risulta maggiormente esposto in termini di massima perdita mensile registrata, evidenziando così differenti profili di esposizione alle fasi di maggiore instabilità dei mercati finanziari.

Concludendo, l'analisi comparativa dei risultati ottenuti evidenzia come la diversa concezione del rischio adottata dai due modelli di ottimizzazione influenzi in maniera sostanziale sia la composizione dei portafogli sia le relative metriche di rischio risultanti. Sebbene entrambi gli approcci perseguano il medesimo obiettivo in termini di rendimento atteso, la differente funzione obiettivo determina scelte allocative significativamente diverse e, di conseguenza, risultati differenti sotto il profilo rischio-rendimento.

Il modello di Markowitz, coerentemente con l'impostazione della *Modern Portfolio Theory*, privilegia la minimizzazione della volatilità complessiva del portafoglio, individuando la combinazione di asset class che garantisce il minor livello di volatilità possibile dato un target di rendimento richiesto.

Il modello proposto nel presente elaborato orienta invece il processo di ottimizzazione verso la minimizzazione del *maximum drawdown* osservato mensilmente, individuando combinazioni di asset che minimizzano il *maximum drawdown* mensile di portafoglio, seguendo così una logica maggiormente coerente con una concezione del rischio che incorpora l'avversione alle perdite dell'investitore.

I risultati ottenuti confermano pertanto come la scelta della misura di rischio rappresenti un elemento determinante nella definizione della strategia di investimento e delle caratteristiche del portafoglio risultante. In tale prospettiva, il modello sviluppato nel presente elaborato rappresenta una versione semplificata di un possibile approccio alternativo a quello tradizionale. L'obiettivo non è quello di proporre un modello definitivo, bensì di delineare un quadro metodologico preliminare che possa costituire la base per successivi sviluppi teorici ed empirici. In tale ottica, contributi successivi potranno estendere e perfezionare il modello al fine di renderlo una valida alternativa ai modelli tradizionali nella rappresentazione della percezione soggettiva del rischio, coerentemente con i principi della finanza comportamentale e, in particolare, della *Prospect Theory*.

Alla luce delle evidenze empiriche emerse, il paragrafo seguente sarà dedicato ad una valutazione critica del modello proposto, analizzandone i principali punti di forza ed i relativi limiti, al fine di delinearne così le potenzialità e gli ambiti di possibile sviluppo in materia di *asset allocation* di portafoglio.

IV.VI Valutazione risultati del modello: punti di forza e limiti

I risultati ottenuti consentono di formulare alcune considerazioni conclusive in merito al modello di ottimizzazione proposto dal seguente elaborato. Il principale elemento di forza dell'algoritmo risiede nella differente concezione di rischio adottata rispetto alla tradizionale impostazione della *Mean Variance Optimization* di Markowitz. Mentre quest'ultima quantifica il rischio attraverso la volatilità dei rendimenti, attribuendo la medesima rilevanza agli scostamenti positivi e negativi rispetto al rendimento medio, il modello sviluppato nel presente

elaborato assume come riferimento la perdita massima potenzialmente sperimentabile dall'investitore, nello specifico il *maximum drawdown* mensile. Tale impostazione risulta maggiormente coerente con i principi della finanza comportamentale e, in particolare, con le tesi della *Prospect Theory* di Kahneman e Tversky secondo cui gli individui non prendano decisioni perfettamente razionali, bensì valutino gli investimenti attraverso una percezione soggettiva del rischio fortemente influenzata dall'avversione alle perdite e dall'emozionalità. In questa prospettiva, la possibilità di subire una perdita assume un peso psicologico significativamente superiore rispetto alla semplice variabilità dei rendimenti, alla quale contribuiscono anche le oscillazioni positive rispetto alla media dei rendimenti storici, rendendo invece il *drawdown* una misura potenzialmente più rappresentativa del rischio effettivamente percepito dall'investitore.

I risultati empirici ottenuti tramite l'analisi degli scenari proposti confermano tale impostazione: è stato evidenziato come, a parità di rendimento obiettivo richiesto, il modello basato sul *maximum drawdown*, pur sostenendo livelli di volatilità superiori rispetto al modello di Markowitz, consente tuttavia una riduzione della perdita mensile massima potenzialmente registrabile dal portafoglio. I risultati confermano dunque che la minimizzazione della volatilità di portafoglio non coincida necessariamente con la minimizzazione della componente del rischio che maggiormente condiziona il comportamento dell'investitore avverso alle perdite.

Il modello proposto, che si rifà al contributo presentato dal dipartimento di statistica dell'università del Wisconsin, rappresenta un tentativo di applicazione di alcuni dei principi descritti dalla finanza comportamentale, integrando nella costruzione del portafoglio una misura di rischio maggiormente allineata alla reale percezione dell'investitore.

Occorre tuttavia evidenziare anche i limiti e le semplificazioni posti dalla formulazione adottata.

Il modello implementato nel presente elaborato non utilizza infatti la definizione classica e più solida di *Maximum Drawdown*, bensì una sua formulazione semplificata, viene infatti definito come peggior rendimento uniperiodale, o perdita, nell'ambito di tutto l'arco temporale considerato; questa semplificazione viene inserita con l'obiettivo di rendere il problema trattabile mediante strumenti di ottimizzazione implementabili in ambiente Excel. Tuttavia, tale semplificazione comporta inevitabilmente la perdita di alcune caratteristiche proprie della funzione di *drawdown* tradizionale, tra cui la dipendenza dalla sequenzialità temporale dei rendimenti (*path dependence*) e l'evoluzione dinamica del montante del portafoglio, che

vengono dispersi nella considerazione dei rendimenti mensili presi singolarmente. Per via di questa definizione semplificativa, il modello non coglie infatti gli effetti cumulativi derivanti dal susseguirsi di più periodi consecutivi caratterizzati da performance negative, che costituiscono uno degli aspetti distintivi della metrica originale.

Nonostante tali limitazioni, la logica sottostante al modello appare comunque coerente con la modalità attraverso la quale molti investitori interpretano l'andamento dei propri investimenti, focalizzando l'attenzione soprattutto sulle perdite subite rispetto ad un *reference point*, che può essere inteso dall'investitore come il capitale investito inizialmente o in funzione dell'andamento del portafoglio, e sulla loro intensità, piuttosto che sulla dispersione complessiva dei rendimenti.

Il modello proposto non intende porsi come un'alternativa definitiva al tradizionale modello di ottimizzazione per la costruzione del portafoglio, bensì come una base metodologica sulla quale sviluppare futuri contributi. Successivi studi potranno infatti estendere la formulazione proposta, introducendo la dinamica del montante e la struttura completa del *Maximum Drawdown*, preservando al contempo la logica comportamentale che pone al centro la percezione soggettiva del rischio e l'avversione alle perdite dell'investitore. Un'evoluzione in tale direzione potrebbe consentire di sviluppare modelli di ottimizzazione capaci di coniugare la formulazione completa con una rappresentazione più realistica del processo decisionale degli investitori.

Conclusioni

L'obiettivo del presente elaborato è stato quello di analizzare il ruolo dell'avversione alle perdite e la reale concezione di rischio percepita dall'investitore nella costruzione dei portafogli finanziari, mettendo a confronto l'approccio della finanza classica con quello della finanza comportamentale, in particolar modo della *Prospect Theory*, verificando come differenti concezioni del rischio possano condurre a differenti strategie di allocazione del capitale.

Nel corso dell'elaborato è emerso come la *Modern Portfolio Theory* di Harry Markowitz rappresenti ancora oggi uno dei principali riferimenti nell'ambito dell'*asset allocation*: il modello media-varianza ha infatti introdotto strumenti fondamentali per la gestione degli investimenti quali la diversificazione, la frontiera efficiente e l'ottimizzazione del rapporto rischio-rendimento. Tuttavia, la sua efficacia si fonda su alcune ipotesi, tra cui la razionalità degli investitori e l'utilizzo della volatilità quale principale misura del rischio, che non sempre rispecchiano la realtà nel mondo dei mercati finanziari.

L'analisi della *Prospect Theory* ha infatti evidenziato come tali ipotesi non siano sempre coerenti con il comportamento osservabile: le decisioni di investimento risultano infatti fortemente influenzate da fattori psicologici ed emotivi, i quali portano gli individui a valutare i risultati rispetto ad un punto di riferimento soggettivo e ad attribuire alle perdite un peso significativamente superiore rispetto ai guadagni di pari entità.

Il tema dell'avversione alle perdite rappresenta uno degli elementi più rilevanti per comprendere le reali modalità con cui gli investitori percepiscono il rischio.

Partendo da queste considerazioni, è emersa la necessità di confrontare le tradizionali misure di rischio con alcuni indicatori maggiormente aderenti alla reale percezione dell'investitore.

L'analisi empirica sviluppata nella parte finale della tesi ha permesso di confrontare un modello di ottimizzazione basato sul *maximum drawdown* con il tradizionale algoritmo di ottimizzazione di Markowitz. I risultati ottenuti hanno evidenziato come i due differenti approcci, basati su principi di ottimizzazione di obiettivi differenti, conducano conseguentemente a portafogli caratterizzati da differenti profili di rischio e differenti composizioni in termini di asset class.

Pur rappresentando un modello con delle semplificazioni strutturali, emerge chiaramente come l'adozione del *maximum drawdown* quale funzione obiettivo permetta di costruire portafogli maggiormente orientati alla limitazione delle perdite più significative, dunque,

conseguentemente più coerenti con le reali percezioni degli investitori in ambito di mercati finanziari.

L'aspetto più significativo emerso da questa tesi riguarda proprio il concetto di rischio: si è descritto come la volatilità rappresenti, nella teoria, uno strumento fondamentale per descrivere il comportamento dei mercati finanziari, tuttavia, difficilmente questa coincide con il modo in cui il rischio viene realmente percepito dagli investitori, i quali, più che all'oscillazione dei rendimenti, sono maggiormente preoccupati dalla possibilità di subire perdite concrete, condizione capace anche di influenzare le decisioni da prendere.

Si ritiene dunque che, sebbene la *Modern Portfolio Theory* di Markowitz continui a rappresentare un pilastro fondamentale per la costruzione dei portafogli, i contributi teorici proposti dalla *Prospect Theory*, possano rappresentare un punto di partenza per la costruzione di modelli quantitativi capaci di integrare maggiormente la dimensione psicologica, sempre più rilevante nella realtà dei mercati, e l'effettiva percezione degli individui rispetto al rischio.

In quest'ottica, il presente elaborato porta a ritenere che la futura costruzione di portafoglio non risieda nella completa sostituzione dei modelli della finanza tradizionale, bensì nella loro evoluzione attraverso l'integrazione con i principi della finanza comportamentale e rinnovate quantificazioni del rischio. L'obiettivo dovrebbe essere quello di rendere gli strumenti quantitativi consolidati maggiormente aderenti al comportamento reale degli investitori, così da costruire portafogli che meglio riassumano anche il fattore comportamentale.

Naturalmente il presente lavoro presenta alcune criticità, partendo dall'analisi empirica, sviluppata mediante una formulazione semplificata della definizione di *maximum drawdown* all'interno del modello; tuttavia, un possibile sviluppo futuro potrebbe riguardare l'applicazione dell'effettiva funzione di *drawdown*, la quale si ritiene che riesca a meglio definire la reale preoccupazione dell'investitore in termini di rischio.

Concludendo, il presente elaborato ha evidenziato come la crescente attenzione verso gli aspetti comportamentali possa rappresentare un'importante opportunità evolutiva dei modelli di costruzione del portafoglio. Integrare nei modelli di ottimizzazione la reale percezione del rischio degli investitori potrebbe consentire di sviluppare strategie maggiormente sostenibili anche dal punto di vista comportamentale. In tale prospettiva, si ritiene che la comprensione delle dinamiche psicologiche non costituisca un'alternativa ai modelli quantitativi tradizionali,

bensi un elemento in grado di completarli e renderli maggiormente aderenti alla realtà dei mercati finanziari.

Bibliografia

Volume

Basile I., Braga M.D., Ferrari P. (2024), “*Asset management e investitori istituzionali*”, 2^a ed., Torino: Pearson, pp. 89-100, pp. 170-172, pp. 217-219.

Journal Article

Bradford D., Siliski D. (2016), “*Performance Drawdown in Asset Management: Extending Drawdown Analysis to Active Return*”, *The Journal of Performance Measurement*, vol. 21, n.1.

Materiale didattico

Braga M.D., “*Appunti del corso di Mercato Mobiliare*”, anno accademico 2025-2026, Università della Valle d'Aosta.

Working paper

Dorador A. (2024), “*Constrained Max Drawdown: a Fast and Robust Portfolio Optimization Approach*”, Department of Statistics, University of Wisconsin.

Volume

Grossman S., Zhou Z. (1993), “*Optimal Investment Strategies for Controlling Drawdowns*”, *Mathematical Finance*, vol. 3, n. 3

Journal Article

Kahneman D., Tversky A. (1979), “*Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk*”, *Econometrica*, vol. 47, n. 2, pp. 263-292.

<https://www.jstor.org/stable/1914185>

Journal Article

Levy J.S. (1992), “*An Introduction to Prospect Theory, Political Psychology*”, vol. 13, n. 2, Special Issue: *Prospect Theory and Political Psychology*, pp. 171-186.

<https://www.jstor.org/stable/3791677>

Journal Article

Markowitz H. (1952), “*Portfolio Selection*”, *The Journal of Finance*, vol. 7, n. 1, pp. 77-91.

<https://www.jstor.org/stable/2975974>