

UNIVERSITA' DELLA VALLE D'AOSTA
UNIVERSITEE DE LA VALLEE D'AOSTE
Dipartimento di Economia e Scienze Politiche

Corso di Laurea in Scienze dell'Economia e della Gestione Aziendale

La stima del ciclo-trend di serie storiche nel
dominio delle frequenze

Andrea Carpentieri

Matricola: 17 C05 575

Relatore: Chiar.ma Prof.sa Consuelo R. Nava

AA 2019-2020

Indice

1	Introduzione	4
2	Review della letteratura	6
2.1	Le serie storiche	6
2.2	Il dominio delle frequenze	8
2.2.1	Analizzatore di spettro	11
2.2.2	Analizzatore all'oggetto	14
2.2.3	Trasformata di Fourier e decomposizione armonica . . .	15
2.3	I filtri	16
2.3.1	Le caratterizzazioni dei filtri	19
2.4	La costruzione del modello	22
3	Il modello	24
3.1	Studio del modello teorico	25
4	Applicazione	34
4.1	Indice della produzione industriale italiana	35
4.2	Indice della produzione industriale britannica	40
4.3	Indice della produzione industriale statunitense	43
4.4	Filtro di Hodrick-Prescott	46
	Filtraggio con il metodo Hodrick-Prescott dell'IPI Ita- liano:	47
	Filtraggio con il metodo Hodrick-Prescott dell'IPI In- glese:	48
	Filtraggio con il metodo Hodrick-Prescott dell'IPI Ame- ricano:	48
5	Conclusioni	50

Ringraziamenti

Desidero ringraziare innanzitutto la relatrice di questa tesi, la professoressa Consuelo Rubina Nava, per la sua conoscenza, disponibilità ed attenzione che ha dedicato al mio elaborato.

Un grazie enorme alla mia famiglia per avermi dato la possibilità di intraprendere questo percorso e di avermi sempre sostenuto.

Ringrazio Eleonora che da anni è al mio fianco, sostenendomi e supportandomi anche in questo percorso oltre che nella vita.

Grazie a Belmo e Apo per aver condiviso questi anni universitari.

Ringrazio poi i miei amici che sono come una seconda famiglia.

Infine ringrazio me stesso perché se sono arrivato qui è soprattutto grazie alla mia determinazione ed al mio impegno.

1 Introduzione

Il seguente elaborato si focalizza su una metodologia di filtraggio innovativa che permette di risolvere alcuni problemi di decomposizione delle serie storiche in componenti elementari in quanto risulta in grado di calibrare l'analisi alle caratteristiche della serie. Attraverso la trattazione dell'argomento si vogliono raggiungere i seguenti obiettivi:

1. il confronto tra un approccio temporale e un approccio frequenziale nello studio di una serie storica;
2. l'estrazione delle componenti di medio-lungo periodo da una serie al fine di poterne stimare il ciclo-trend;
3. l'applicazione di uno filtro innovativo non-parametrico a una serie storica economica reale (indice della produzione industriale di Italia, UK e USA) per comprenderne il funzionamento e capirne le potenzialità nel concreto;
4. fornire una interpretazione economica dei risultati ottenuti dall'analisi econometrica.

Nello specifico, al fine di raggiungere i suddetti obiettivi, ci concentreremo sulla tecnica di filtraggio messa a punto da Barbieri et al. [2013].

La tesi ha pertanto la seguente struttura: nel secondo capitolo, dedicato alla review della letteratura, ci siamo focalizzati sugli aspetti teorici dello strumento cercando di mettere in evidenza le differenze che vi sono tra un approccio temporale e uno frequenziale. Nel terzo capitolo, ovvero quello relativo alla descrizione del modello, ci siamo occupati dello studio del modello teorico, ossia del filtro di Barbieri et al. [2013] che ci permette di estrarre la componente ciclo-trend e che sarà poi utilizzato nell'applicazione. Il quarto capitolo, che concerne l'applicazione del filtro a un caso pratico, consente di dimostrare come opera effettivamente la metodologia proposta su serie

storiche reali, permettendoci così sia di comprenderne le potenzialità sia di dare una lettura dei risultati ottenuti in chiave economica. La serie scelta, nel quarto capitolo, è quella dell'indice della produzione industriale relativa a tre paesi differenti: Italia, USA e UK. Tale scelta consente di studiare tre realtà attraverso l'uso del filtro e di evidenziare, fra queste, somiglianze e differenze. Infine, sempre nel quarto capitolo, si è proposto anche il confronto con le performance di estrazione del ciclo-trend utilizzando un filtro già molto popolare in ambito economico quale il filtro di Hodrick-Prescott.

2 Review della letteratura

2.1 Le serie storiche

Le serie storiche o temporali, nella statistica descrittiva, corrispondono ad un insieme di variabili casuali¹ classificate rispetto alla modalità quantitativa “tempo”. Le serie storiche sono dunque in grado di rappresentare le dinamiche di un fenomeno, in questo caso preciso di tipo economico, nel tempo e vengono opportunamente analizzate al fine di prevederne il comportamento futuro [Santamaria, 2000]. Le serie possono appartenere a due grandi categorie:

- **deterministiche:** nei casi in cui è possibile determinare il valore delle variabili sulla base dei valori già realizzati;
- **stocastiche:** nei casi in cui è possibile determinare il valore delle variabili solo parzialmente sulla base dei valori precedenti;

In questo elaborato ci concentreremo su questa seconda “tipologia” di serie storiche.

Risulta essere molto importante lo studio della componente di medio-lungo periodo in quanto, isolandola dal resto della serie, è possibile andare ad effettuare una previsione del comportamento futuro del fenomeno attraverso la stima di un valore incognito [Santamaria, 2000]. Per studiare la dinamica di medio-lungo periodo dei fenomeni economici è però necessario scindere questi ultimi in andamenti elementari che normalmente sono identificati con le nozioni di trend, ciclo, stagionalità ed errore. In termini matematici è possibile rappresentare le serie storiche attraverso il seguente modello:

$$x_t = f_t + c_t + s_t + \varepsilon_t \quad (1)$$

¹È una variabile che può assumere valori diversi in funzione di un fenomeno aleatorio.

dove f_t rappresenta la componente di fondo o trend, c_t rappresenta la componente ciclica o congiunturale, s_t la componente stagionale e ε_t la componente accidentale. Vediamo nel dettaglio in che cosa si sostanziano.

- **Componente di fondo:** identifica il comportamento regolare di fondo e si presenta come un andamento monotonic o unimodale, ovvero con un unico punto di massimo (modale) e un unico punto di minimo (antimodale). Nella pratica corrisponderebbe a fattori economici e sociali quali l'accumulazione di capitale, lo sviluppo tecnologico o lo sviluppo demografico, ovvero tutti quei fenomeni che presentano un andamento crescente. Questa componente elementare è praticamente sempre presente in una serie storica in quanto ne rappresenta una componente sostanziale; pertanto spesso è identificabile attraverso la semplice analisi del grafico della serie. [Faliva and Zoia, 2019] [Zoia, 1996a]
- **Componente ciclica:** è caratterizzata da fluttuazioni di durata pluriennale che possono avere una periodicità variabile dai 3 ai 12 anni [Faliva and Zoia, 2019]. Nella realtà si traducono in sequenze temporali nella quale si alternano periodi di prosperità (o di espansione) seguiti poi da periodi di ristagno che a loro volta riconducono a periodi di espansione. Questa componente può essere ulteriormente distinta in: cicli di Kinchin (o cicli brevi), cicli di Juglar (o cicli medi) e cicli di Kondratieff (o cicli lunghi). Il concetto sottostante da capire è che un sistema economico è costantemente sottoposto a spinte diverse, endogene o esogene al sistema stesso, in grado di generare delle scosse che si propagano in tempi diversi a tutto il sistema economico. La componente di fondo e la componente congiunturale sono molto correlate tra loro tant'è vero che difficilmente vengono trattate separatamente [Zoia, 1996a].
- **Componente stagionale:** corrisponde a un movimento sistematico caratterizzato da oscillazioni su base annuale [Faliva and Zoia, 2019].

Il carattere oscillatorio fa sì che la stagionalità sia diversa dal trend mentre la sua periodicità fa sì che sia distinta dalla componente congiunturale. Le oscillazioni di questa componente tendono ad annullarsi nell'arco dell'anno e, inoltre, l'intensità delle relative oscillazioni può risultare differente tra i diversi periodi [Zoia, 1996a].

- **Componente accidentale:** questa componente, anche chiamata errore, è considerata l'elemento di disturbo delle altre componenti elementari sopra indicate [Faliva and Zoia, 2019]. Può essere interpretata come l'insieme dei fattori irregolari, cioè imputabili al caso, che attraverso le loro fluttuazioni vanno ad influenzare, anche se in modo non sistematico, il fenomeno [Zoia, 1996a].

Le prime tre componenti descritte compongono la parte sistematica della serie storica, che può essere interpretata come segnale, mentre la componente accidentale costituisce la parte residuale ed è interpretabile come rumore [Santamaria, 2000]. Date queste assunzioni il modello matematico che rappresenta la serie storica visto in precedenza (1) può essere riformulato nel seguente modo:

$$x_t = d_t + r_t \tag{2}$$

dove d_t rappresenta la componente sistematica mentre r_t rappresenta la componente residuale della serie.

2.2 Il dominio delle frequenze

Il processo di decomposizione delle serie storiche, passo fondamentale per giungere ad una separazione delle diverse componenti elementari, può essere effettuato utilizzando due approcci differenti: temporale o frequenziale. Nella maggior parte dei casi, come suggerito da Zoia [1996a], è preferibile rappresentare le componenti nel dominio delle frequenze in quanto ciò permette di ottenere calcoli più semplici e di evidenziare alcune proprietà e

caratteristiche della serie che non sono facilmente percepibili qualora l'analisi venga circoscritta al dominio temporale. Proprio per questo motivo in questo elaborato ci focalizzeremo sull'analisi spettrale delle serie ed in particolare sull'approccio frequenziale non parametrico² messo a punto da Faliva and Zoia [2019].

L'approccio di Faliva and Zoia [2019] è molto importante in quanto ci permette di associare a ciascuna componente elementare (trend, ciclo, stagionalità ed errore) una gamma di frequenze e, successivamente, sfruttando un particolare strumento che prende il nome di analizzatore di spettro, di capire il contributo in potenza/variabilità delle varie componenti nella serie [Zoia, 1996b]. Nello specifico, le bande di frequenza associate alle diverse componenti sono le seguenti:

- **Componente di fondo:** a questa componente di fondo o di lungo periodo è possibile dare un'interpretazione in chiave frequenziale facendo corrispondere alla nozione di lungo periodo la nozione di basse frequenze [Faliva and Zoia, 2008] [Zoia, 1996b]. Più nello specifico f_t può essere interpretato come un segnale banda-limitato con frequenza di taglio corrispondente a ϕ che è dato da $\frac{\pi}{N}$ [Barbieri et al., 2013]. La rappresentazione integrale armonica di questa componente risulta essere la seguente:

$$f_t = \int_{|w| < \phi} e^{iwt} dF(w). \quad (3)$$

- **Componente ciclica:** con questo termine vengono indicate le fluttuazioni economiche che possono variare tra periodi medio-lunghi o medio-brevi [Faliva and Zoia, 2008] [Zoia, 1996b]. In ogni caso questi periodi sono limitati superiormente dalla soglia virtuale del trend corrispondente a $2N$ e limitati inferiormente dalla soglia dei 2 anni. L'interpretazione nel dominio delle frequenze di questa componente corrisponde ad

²I modelli matematici non necessitano di ipotesi a priori sulle caratteristiche del parametro.

un segnale con frequenza limitata nell'intervallo $\frac{\pi}{N} < |w| < \frac{\pi}{T}$ [Barbieri et al., 2013]. Ciò porta alla seguente rappresentazione integrale:

$$c_t = \int_{\frac{\pi}{N} < |w| < \frac{\pi}{T}} e^{iwt} dC(w). \quad (4)$$

- **Componente stagionale:** componente di breve periodo che riflette le fluttuazioni annuali alla quale viene associata la gamma delle alte frequenze [Faliva and Zoia, 2008] [Zoia, 1996b]. Di regola la sua ampiezza presenta oscillazioni diverse di anno in anno che danno luogo alla caratteristica dell'evoluitività di questa componente. Una delle ipotesi per spiegare questo meccanismo dell'evoluitività è il fatto che le componenti di lungo periodo influiscano su quelle di breve portando al seguente modello [Barbieri et al., 2013]:

$$s_t^{ev} = (\alpha_0 + \alpha_1 p_t) s_t \quad (5)$$

dove $\alpha_0 + \alpha_1 p_t$ rappresenta lo sviluppo mentre s_t rappresenta la stagionalità costante. La banda di frequenze che rappresenta s_t^{ev} corrisponde all'intervallo $\frac{\pi}{T} < w \leq \pi$ e $-\pi < w < -\frac{\pi}{T}$ [Barbieri et al., 2013]; di conseguenza la rappresentazione integrale di Fourier risulta essere:

$$s_t^{ev} = \int_{-\pi < w < -\frac{\pi}{T}} e^{iwt} dS(w) + \int_{\frac{\pi}{T} < w \leq \pi} e^{iwt} dS(w). \quad (6)$$

- **Componente accidentale:** questa componente, vista come componente di disturbo, può essere interpretata come una frequenza che si spalma sull'intero arco delle frequenze ammissibili ³. [Faliva and Zoia, 2008] [Zoia, 1996b] La sua rappresentazione frequenziale assume la seguente forma:

$$\varepsilon = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwt} d\Theta(w). \quad (7)$$

³Il dominio delle frequenze ammissibili della serie è compreso tra $-\pi$ e π .

A seguito di quanto detto per le varie componenti è possibile giungere ad una rappresentazione armonica della serie x_t data da [Barbieri et al., 2013]:

$$x_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwt} dX(W) \quad (8)$$

dove

$$X(w) = \begin{cases} F(w) + \Theta(w) & \text{se } |w| < \frac{\pi}{N}, \\ C(w) + \Theta(w) & \text{se } \frac{\pi}{N} < |w| < \frac{\pi}{T}, \\ S(w) + \Theta(w) & \text{se } -\pi < w < -\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T} < w \leq \pi \end{cases} \quad (9)$$

Dopo aver individuato la potenza delle varie componenti all'interno della serie, il nostro “problema” di enucleazione delle componenti di medio e lungo periodo (cioè del ciclo-trend), consiste nell'andare ad individuare quella tecnica di filtraggio ottimale che meglio si adatta alle caratteristiche della serie che siamo riusciti ad individuare grazie allo spettro stilizzato [Zoja, 1996b]. C'è da sottolineare che nell'individuazione del filtro ottimale bisogna anche tenere in considerazione l'evoluitività della componente stagionale e ciclica.

2.2.1 Analizzatore di spettro

Come già anticipato in precedenza, l'analizzatore di spettro è quello strumento che ci permette di effettuare un'analisi dello spettro della serie in quanto è in grado di individuare il ruolo che viene svolto dalle diverse bande di frequenza (quindi dalle diverse componenti) nella formazione della variabilità complessiva della serie [Zoja, 1996b]. Utilizzandolo è dunque possibile andare ad individuare le caratteristiche della serie in esame e scegliere il filtro migliore per enucleare la componente di nostro interesse, cioè il ciclo-trend. Lo strumento analizzatore di spettro nel concreto corrisponde ad un dispositivo che è composto da una batteria di filtri che operano una sequenza di trasformazioni sulla serie [Zoja, 1996b]. Ciascuno dei filtri che compone l'ana-

lizzatore: «è in grado di selezionare dalla serie storica in entrata i sottoinsiemi di onde che si collocano in specifiche fasce di frequenza, permettendo così di individuare le diverse componenti» [Zoia, 1996a]. Nello specifico lo strumento è sostanzialmente composto da un filtro passa-basso ⁴ e da una serie di filtri passa-banda ⁵ [Papoulis, 1962][Zoia, 1996b]. L'effetto cumulato dell'azione di questi filtri può essere visto come l'azione di un filtro passa-tutto, infatti la serie che si ottiene riproduce integralmente la serie grezza ⁶ anche se in maniera decomposta [Zoia, 1996a].

Per effettuare l'analisi di nostro interesse possono essere utilizzate due classi di analizzatori:

- *Analizzatore di spettro simultaneo*: questa tipologia di strumento lavora basandosi sul principio del filtraggio multiplo, ovvero il segnale $f(t)$ viene immesso in una gamma di n filtri $H(w)$ e per ciascuno di essi si otterrà un output $g(t)$ [Papoulis, 1962] [Zoia, 1996a]. Graficamente questo primo dispositivo può essere rappresentato dalla figura 1

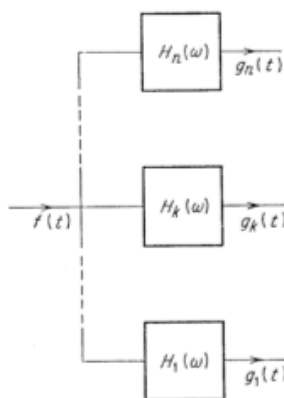


Figura 1: Azione filtro simultaneo tratta dal libro di Papoulis [1962]

⁴La banda passante del filtro include la frequenza nulla.

⁵La banda passante del filtro non include la frequenza nulla.

⁶Serie storica di partenza.

- *Analizzatore di spettro sequenziale*: questo strumento consiste invece in un unico filtro che lavora sul principio della modulazione. In questo caso il segnale $f(t)$ e la sua frequenza modulata $s(t)$ sono inserite in un moltiplicatore ottenendo un primo output, quest'ultimo sarà poi inserito all'interno del filtro $H(\omega)$ ottenendo l'ultimo e definitivo output $g(t)$ [Papoulis, 1962] [Zoja, 1996a]. Graficamente può essere rappresentato nel seguente modo:

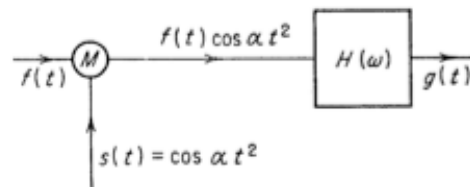


Figura 2: Azione filtro sequenziale tratto da Papoulis [1962]

2.2.2 Analizzatore all'oggetto

A seguito dell'utilizzo dell'analizzatore di spettro che ci consente di individuare il peso relativo dei diversi andamenti elementari, risulta molto utile l'applicazione del criterio all'oggetto affinché sia possibile identificare il filtro migliore per enucleare e stimare la componente ciclo-trend. Nello specifico questo strumento verifica l'attenuazione che viene prodotta da ciascun filtro su ogni singola componente della serie. Questa attenuazione può essere misurata mettendo a rapporto la quota di potenza/variabilità della componente di nostro interesse nella serie filtrata, x_f , con la quota di potenza/variabilità della stessa componente nella serie grezza, x_g [Zoja, 1996a]. In formule, l'attenuazione che viene operata da un filtro su una data gamma di frequenze, come per esempio V_w , può essere espressa dal seguente rapporto:

$$\frac{\int_{V_w} dP_{x_f}(w)}{\int_{V_w} dP_{x_k}(w)} \quad (10)$$

e può essere valutata mediante:

$$\frac{\sum_k \zeta_{k,f}}{\sum_k \zeta_{k,k}}. \quad (11)$$

Grazie all'utilizzo della formula (11) è possibile calcolare l'attenuazione in Decibel. Ciò ci permette di valutare l'efficacia dell'operazione di filtraggio anche grazie all'ausilio di intervalli specificatamente individuati per fungere da linee guida nell'interpretazione dei risultati. In concreto si parla di:

- *Attenuazione trascurabile*: fino a -0.005 dB l'attenuazione è considerata trascurabile in quanto corrisponde ad una riduzione del contributo in potenza che non eccede l'1% [Zoja, 1996b].
- *Attenuazione entro limiti accettabili*: fino a -1,5 dB l'attenuazione è considerata entro limiti accettabili in quanto corrisponde ad una perdita di contributo in potenza non eccedente il 30% [Zoja, 1996b].

- *Attenuazione di livello elevato*: sopra i -20 dB l'attenuazione è considerata già di alto livello, in quanto corrisponde ad una perdita di contributo in potenza della serie depurata rispetto alla serie grezza nell'ordine del 99% [Zoja, 1996b].
- *Attenuazione molto spinta*: oltre i -30 dB l'attenuazione è considerata molto spinta in quanto corrisponde ad una perdita di contributo in potenza pari al 99,9% [Zoja, 1996b].

2.2.3 Trasformata di Fourier e decomposizione armonica

La trasformata di Fourier, anche chiamata integrale di Fourier, è un operatore molto utile per effettuare l'analisi di una serie storica in chiave frequenziale in quanto ci permette di trasformare e riscrivere una funzione che dipende dal tempo, t , nel dominio delle frequenze. Bisogna sottolineare che non si tratta di una trasformazione fissa e stabile in quanto se ad una data funzione dipendente dal tempo viene applicata due volte la trasformata si ritorna alla situazione di partenza. Tutto ciò è reso possibile soprattutto grazie alla capacità di quest'integrale di scomporre un segnale complesso (onde periodiche) in una somma infinita di sinusoidi (onde armoniche) che presentano una frequenza (numero di oscillazioni in una data unità di tempo), un'ampiezza (scarto massimo di oscillazione dall'asse) e delle fasi (distanza tra l'origine e il primo punto di massimo) differenti. Matematicamente la trasformata di Fourier è rappresentata dal seguente integrale [Papoulis, 1962]:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt \quad (12)$$

dove:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt} dw. \quad (13)$$

Strettamente collegata alla cosiddetta Trasformata di Fourier vi è la decomposizione armonica, tema fondamentale per l'applicazione del teorema.

Infatti, con il termine “moto armonico” si indica un moto periodico piuttosto semplice in quanto la funzione che descrive la posizione di un punto in funzione del tempo è una semplice senoide di ampiezza costante. Data la sua semplicità, il relativo moto armonico può essere facilmente descritto dai soli tre parametri già anticipati in precedenza: frequenza, ampiezza e fase. Detto ciò, e sapendo che le oscillazioni complesse sono costituite dalla sovrapposizione di diverse onde armoniche, riusciamo a capire l'importanza della decomposizione armonica che consiste nella possibilità di decomporre le oscillazioni complesse in oscillazioni armoniche (procedimento noto come analisi spettrale o analisi di Fourier) [Papoulis, 1962] [Zoia, 1996a].

2.3 I filtri

I filtri sono degli strumenti di fondamentale importanza per raggiungere l'obiettivo di nostro interesse, ovvero enucleare la componente ciclo-trend. Per questo è utile approfondire l'argomento per avere una visione più chiara e completa.

Innanzitutto la parola filtro viene utilizzata per descrivere un sistema lineare che ha particolari caratteristiche di ampiezza, A_w , tant'è vero che quest'ultima può essere trascurabile in alcune parti della frequenza degli assi [Papoulis, 1962]. È necessario sottolineare che esistono essenzialmente due categorie di filtri importanti per lo sviluppo di questo modello:

- *Filtro passa-basso o low-pass filter*: è un filtro che data la sua frequenza di taglio, α , include nella banda passante (la banda di frequenze che passeranno inalterate), lo 0 e cioè l'origine [Zoia, 1996a] [Papoulis, 1962]. Nello specifico un low-pass filter ideale ha un'ampiezza, $A(w)$, pari a:

$$A(W) = \begin{cases} A_0 & |w| \leq \alpha \\ 0 & |w| > \alpha \end{cases} = A_0 \begin{cases} 1 & |w| \leq \alpha \\ 0 & |w| > \alpha \end{cases} \quad (14)$$

Quindi all'ampiezza corrisponde un valore pari ad 1 con riferimento alla banda passante mentre assume valore pari a 0 con riferimento alle frequenze escluse dalla frequenza di taglio. Dunque il filtro passa-basso è un sistema lineare che ha un'ampiezza, $A(w)$ relativamente piccola nel senso che $w > \alpha$ dove α rappresenta la frequenza di taglio. [Papoulis, 1962]. Graficamente l'azione di un filtro passa-basso ideale può essere rappresentata dalla seguente immagine:

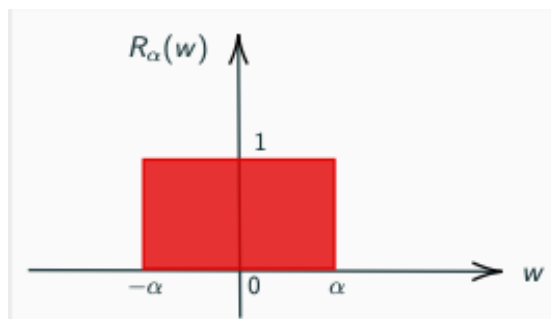


Figura 3: Azione filtro passa-basso Zoia [1996a]

- *Filtro passa-banda o band-pass filter*: in questo caso il filtro, ed in particolare la sua ampiezza, assume valore uguale ad 1 in due bande di frequenza simmetriche rispetto all'origine e dunque, in questo caso lo 0 (l'origine), non è inclusa nella banda passante [Papoulis, 1962]. Al contrario di quanto visto in precedenza i filtri passa-banda hanno un'ampiezza che ha valori significativi solo in un intervallo che non contiene l'origine [Papoulis, 1962]. La funzione di trasferimento H_p può essere rappresentata dalla seguente equazione:

$$H_p(w) = R_\alpha(w - \alpha) + R_\alpha(w + \alpha) \quad (15)$$

Graficamente l'azione di un filtro passa-banda può essere rappresentata dalla seguente immagine:

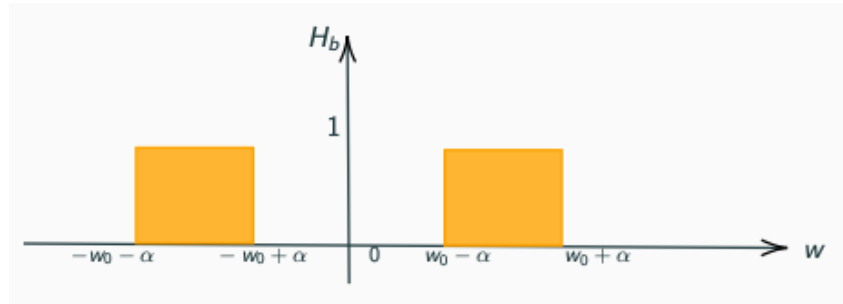


Figura 4: Azione filtro passa-banda Zoia [1996a]

Dunque, sulla base della componente che voglio isolare, è necessario individuare ed utilizzare un filtro che presenta la frequenza di taglio più adatta. Idealmente un filtro ottimale ci permette di far passare senza attenuazioni e distorsioni significative la componente ciclo-trend mentre blocca o attenua in maniera drastica le componenti di alta frequenza (in particolare la stagionalità) [Zoia, 1996a]. Bisogna rimarcare che in questo ambito i filtri non vengono adoperati singolarmente bensì, come abbiamo già evidenziato in precedenza, vengono utilizzati in gruppo e vanno a comporre l'analizzatore di spettro. A riguardo Zoia [1996a] sottolinea come sia necessario che i filtri che compongono l'analizzatore rispettino certi requisiti, tra cui il più importante:

- **il requisito di base:** «per ogni istante temporale il valore cumulato degli output \hat{x}_{kt} dell'analizzatore riproduca esattamente la serie di input x_t » [Zoia, 1996b] In formule questo requisito può essere rappresentato nel seguente modo:

$$x_t = \sum_{k=0}^K \hat{x}_{kt}, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots, K. \quad (16)$$

2.3.1 Le caratterizzazioni dei filtri

Per quanto riguarda i processi Zoia [1996a] sottolinea come si possa parlare di processi armonizzabili in senso forte e processi armonizzabili in senso debole. In questa sezione, dopo aver dato una definizione di processo armonizzabile e visto alcuni aspetti rilevanti di quest'ultimo, ci concentreremo sulla prima tipologia (in senso forte) in quanto questa ci permette, richiamando altri elementi, di mettere in luce le caratterizzazioni dei filtri e di rispondere a possibili questioni applicative. In primo luogo, come abbiamo già visto, un processo viene definito armonizzabile se può essere rappresentato sotto forma di integrale di Fourier Stieltjes del tipo:

$$X_t = \int e^{iwt} Z(dw). \quad (17)$$

Nel caso in cui X_t sia un processo reale la (17) può essere rappresentata in modo più dettagliato come segue:

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(wt)U(dw) + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(wt)V(dw) \quad (18)$$

Come si può notare la rappresentazione spettrale di un processo stazionario consiste in una sorta di decomposizione dello stesso processo in onde periodiche $e^{iwt}dZ(w)$ caratterizzate da ampiezze e fasi casuali [Zoia, 1996a]. La decomposizione armonica vista nella (17) vale per i processi che presentano una potenza media finita, cioè, in formule:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} E \left[\sum_{t=-T}^T |X_t|^2 \right] < \infty. \quad (19)$$

Processi di questo tipo possono essere caratterizzati mediante la funzione $G(w)$, che rappresenta la misura di covarianza associata a $Z(w)$, ma che in questo caso particolare prende il nome di spettro integrato di potenza e, come affermato da Zoia [1996a] «può essere altresì espresso come valore atteso della

trasformata generalizzata di Fourier di X_t , data da»:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E\left(-\frac{1}{2\pi} \left[\left| \sum_{t=-T}^T X_t e^{-itw} \right|^2 \right]\right) \geq 0 \quad (20)$$

È opportuno sottolineare, a seguito di quanto detto, che a causa della natura quasi periodica che caratterizza le realizzazioni del processo X_t non è possibile rappresentare quest'ultimo attraverso un integrale proprio di Fourier; per questo motivo spesso si sfrutta una versione “troncata” di una realizzazione infinita di tale processo:

$$X_t = X_t p_t \quad p_t = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| < T \\ 0 & \text{se } |t| > T \end{cases} \quad (21)$$

in modo tale da poterla rappresentare come integrale proprio di Fourier con trasformata di Fourier data da:

$$Z_t(w) = \sum_{t=-T}^T X_t e^{iwt}. \quad (22)$$

Come spiegato in precedenza, la quantità data da $|Z_t(w)dw|^2$ rappresenta il contributo all'energia totale del processo fornito da tutte le componenti con una frequenza compresa nell'intervallo dw . Considerando poi la potenza per unità di tempo, ottenuta rapportando la quantità appena citata per l'unità di tempo $2T$, e facendo qualche piccolo aggiustamento si giunge ad una rappresentazione di $G(w)$ tale che quest'ultimo risulta essere la trasformata di Fourier della funzione di autocovarianza [Zoja, 1996a], algebricamente:

$$v(t) = \int_{-\pi}^{\pi} G(dw) e^{itw}. \quad (23)$$

Ciò fa sì che «l'informazione contenuta nella funzione di autocovarianza sia l'immagine speculare di quella contenuta nello spettro di potenza» [Zoja,

1996a].

In secondo luogo è bene definire cosa si intende per armonizzabilità in senso forte: «indicando con H lo spazio di Hilbert delle variabili casuali del processo, diremo che il processo X_t è armonizzabile in senso forte se e solo se la sua funzione di autocovarianza $v(\cdot)$ è esprimibile indicando con P l'insieme $(-\pi, \pi]$ e con P^2 l'insieme $P \times P$, nella forma» [Zoia, 1996a]:

$$v(s, t) = \int_P \int_P e^{i s w - i t w^\bullet} G(dw, dw^\bullet). \quad (24)$$

Quest'ultima non è la sola definizione che può essere data di armonizzabilità in senso forte, infatti una definizione alternativa è la seguente: «il processo X_t è armonizzabile in senso forte se la sua funzione di autocovarianza ammette una rappresentazione del tipo» [Zoia, 1996a]:

$$v(s, t) = \int_P \int_P e^{i w s - i w^\bullet t} \rho(dw, dw^\bullet) \quad (25)$$

dove ρ è una bimisura complessa. Dunque la classe dei processi fortemente armonizzabili rappresenta un'estensione dei processi stazionari⁷ (infatti i processi stazionari sono fortemente armonizzabili). Ne deriva che i processi stazionari rappresentano un sottoinsieme dei processi fortemente armonizzabili. Inoltre, sempre per i processi fortemente armonizzabili, la stazionarietà implica che il legame tra la misura stocastica z e la misura di covarianza G sia espresso dalla seguente relazione [Zoia, 1996a]:

$$\rho(A, B) = E(Z(A) z^\bullet(B)) = G(A \cap B). \quad (26)$$

⁷I processi stazionari sono quei processi stocastici la cui distribuzione di probabilità congiunta non varia se viene traslata nel tempo, quindi parametri come la media e la varianza anche non variano nel tempo e sono costanti.

2.4 La costruzione del modello

Per la costruzione del modello che andremo ad applicare ad una serie storica è bene tenere a mente i pilastri teorici analizzati nelle sezioni precedenti. Il punto di partenza del modello è l'esplicitazione delle quattro componenti che compongono una serie storica [Zoja et al., 2019]:

$$x_t = f_t + c_t + s_t + \varepsilon_t \quad (27)$$

A questo punto, sapendo che è possibile procedere alla stima del ciclo-trend attraverso due approcci, è necessario ricordare che utilizzeremo il dominio frequenziale e quindi che le fluttuazioni nella serie storica corrispondono alla sovrapposizione di onde armoniche che hanno ampiezza, periodi (frequenze) e fasi che evolvono nel tempo. Inoltre, bisogna sottolineare che adotteremo un approccio non parametrico in cui per estrarre la componente di nostro interesse (TC ⁸) si effettuerà un'operazione di filtraggio [Papoulis, 1962] [Zoja et al., 2019]. Il TC viene indicato con la simbologia ρ_t e può essere rappresentato dalla seguente formula matematica:

$$\rho_t = f_t + c_t^{ev} \quad (28)$$

dove

$$c_t^{ev} = (\beta_0 + \beta_1 \times f_t) \times c_t \quad (29)$$

Nell'equazione 29 β_0 e β_1 rappresentano i coefficienti, f_t la componente di fondo e c_t la componente ciclica fissa. La nostra volontà è quella di ottenere una stima del ciclo trend, $\hat{\rho}$, utilizzando un filtro che è pressoché un operatore idempotente ⁹ [Papoulis, 1962]. L'azione del modello fin qui descritto può essere riassunta graficamente dalla seguente immagine:

⁸Trend-cycle.

⁹È una proprietà delle funzioni per la quale la molteplicità di applicazione della stessa non fa variare il risultato rispetto ad una sua singola applicazione.

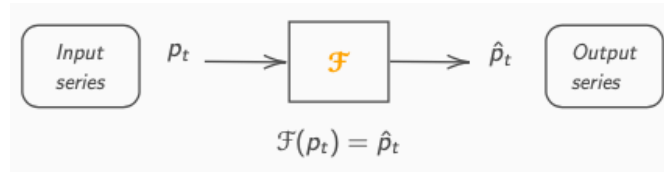


Figura 5: Meccanismo di funzionamento del modello per la stima del TC Papoulis [1962]

Per riuscire a lavorare nel dominio frequenziale è necessario utilizzare la trasformata di Fourier, quest'ultima infatti è in grado di “splittare” un'onda periodica (dipendente dal tempo) in più semplici onde armoniche in funzione delle diverse ampiezze. Algebricamente la trasformata di Fourier è rappresentata dall'equazione già vista nella sezione precedente:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt \quad (30)$$

Una volta che, grazie all'applicazione della trasformata, la serie storica viene convertita nel dominio delle frequenze, l'enucleazione del TC è ricondotta ad un problema di filtraggio. Nello specifico è necessario individuare quel filtro, F , e relativa frequenza di taglio, α , che permettono di ottenere un lisciamiento delle componenti che non sono di nostro interesse. Affinché sia possibile andare a definire α è necessario studiare la forza di ciascuna componente e di ciascuna banda di frequenza all'interno dello spettro della serie e per farlo devo ricorrere allo strumento chiamato analizzatore di spettro [Papoulis, 1962] [Zoja, 1996b].

3 Il modello

In questa sezione, dopo esserci approcciati al tema in maniera letteraria, andremo ad analizzare il modello che sarà utilizzato nel seguente elaborato. Nello specifico, partendo da una serie storica andremo ad applicare nel concreto gran parte degli strumenti che sono stati esposti nella sezione 2. Dopo aver individuato e selezionato i dati necessari (input), procederemo con l'applicazione del modello che prevede una serie di passaggi specifici:

1. *Scissione della serie nelle sue componenti elementari*: Come già anticipato precedentemente è fondamentale andare a scindere la serie storica in considerazione nelle sue componenti elementari. Per farlo utilizzeremo un approccio frequenziale per facilitare la comprensione dell'intero modello. In particolare faremo riferimento alle importanti nozioni forniteci da Faliva and Zoia [2019] che ci permettono di accostare alle diverse componenti diverse bande di frequenza.
2. *Capire il contributo in potenza delle varie componenti attraverso l'analizzatore di spettro*: Una volta scissa la serie storica sarà necessario adoperare l'analizzatore di spettro che ci consentirà di capire il contributo in potenza/variabilità delle diverse componenti e di conseguenza le caratteristiche della serie storica. Inoltre questo strumento ci permetterà, una volta applicato un determinato filtro, di valutare la sua efficacia consentendoci di confrontare le attenuazioni che vengono apportate dal filtro sulle varie componenti (si parla di serie grezza e serie filtrata).
3. *Individuare il filtro migliore per enucleare la componente di medio-lungo periodo attraverso l'utilizzo dell'analizzatore all'oggetto*: Dopo aver applicato il filtro alla serie storica decomposta per ottenere una stima della componente di ciclo-trend è bene utilizzare un analizzatore all'oggetto che ci permette di comprendere, nella serie filtrata, quanto

effettivamente vengano attenuate le componenti che non sono di nostro interesse (stagionalità, s_t , ed errore, ε_t) e quanto invece viene mantenuta la componente ciclo-trend. A riguardo, risulta piuttosto semplice valutare la bontà di azione di un filtro poiché, attraverso l'applicazione di questo strumento si ottengono dei valori di semplice lettura. Quest'ultimo aspetto è reso possibile grazie agli intervalli di valutazione dell'attenuazione che sono stati individuati da Zoia [1996b].

3.1 Studio del modello teorico

In questa sezione ci focalizzeremo sulla presentazione del filtro che poi andremo ad applicare nel concreto nel capitolo successivo. In primo luogo è doveroso sottolineare che parleremo di un filtro, cioè di un sistema lineare, che presenta due caratteristiche principali:

- **Linearità:** un sistema viene definito lineare quando è composto da più equazioni di primo grado ¹⁰ in più incognite. Di conseguenza, con il termine linearità si fa riferimento ad una relazione che intercorre fra due o più enti matematici [Papoulis, 1962]. Attraverso le formule, si parla di linearità quando:

$$F(\alpha x_t + \beta z) = \alpha F(x_t) + \beta F(z_t) \quad (31)$$

- **Invariabilità nel tempo:** si parla di invariabilità nel tempo quando i parametri del sistema sono indipendenti dal tempo. Tramite l'equazione può essere così rappresentata:

$$F(B^h x_t) = B^h F(x_t) \quad (32)$$

¹⁰L'incognita compare con esponente pari ad 1.

Un filtro con queste caratteristiche, cioè lineare ed invariabile nel tempo, presenta delle esponenziali complesse come autofunzioni:

$$F(e^{i\omega t}) = H(\omega)e^{i\omega t} \quad (33)$$

dove $H(\omega)$ rappresenta la funzione di trasferimento ¹¹ del sistema. In particolare la funzione di trasferimento corrisponde a:

$$H(\omega) = H_1(\omega) + iH_2(\omega) = A(\omega)e^{i\phi(\omega)} \quad (34)$$

dove:

$A(\omega) = |H(\omega)|$ corrisponde all'ampiezza nonché allo spettro di Fourier di $f(t)$,

$A^2(\omega)$ corrisponde allo spettro di potenza

e

$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{H_2(\omega)}{H_1(\omega)}\right)$ corrisponde alla fase lineare [Zoja, 1996b] [Faliva and Zoia, 2019].

Inoltre, per avere a che fare con un filtro non distorto faremo due assunzioni:

1. $A(\omega) = A_0$: costante. Dunque, il filtro non sarà distorto in ampiezza.
2. $\phi(\omega) = \omega t$: ciò implica che la fase del filtro sia lineare così da non provocare distorsione di fase.

Dopo aver parlato di questi aspetti fondamentali dello strumento che andremo ad utilizzare è doveroso fare altre precisazioni. Inanzitutto la funzione di trasferimento $H(\omega)$ corrisponde alla trasformata di Fourier della funzione di

¹¹È una funzione che caratterizza il comportamento di un sistema dinamico tempo-invariante nel dominio delle frequenze.

risposta impulsiva ¹² a_t [Zoja et al., 2019]:

$$H(w) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} a_t e^{-iwt} \quad (35)$$

La funzione di risposta impulsiva a_t , come sottolineato nelle note, non è altro che l'output del sistema lineare (filtro) F all'ingresso dell'impulso unitario δ_t :

$$a_t = F(\delta_t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwt} H(w) dw \quad (36)$$

dove: $\delta_t = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$

I vari filtri, con le differenti frequenze di taglio, vengono adoperati in modo simultaneo con l'analizzatore di spettro e la loro azione nel complesso deve rispettare dei requisiti, affinché sia possibile pervenire ad una descrizione sufficientemente dettagliata del contributo in potenza/variabilità fornita dalle diverse bande di frequenze [Zoja, 1996b]. In particolare, richiamando i concetti di funzione di trasferimento e di funzione di risposta impulsiva è necessario che i filtri scansionino l'intero arco di frequenze di nostro interesse, cioè da $-\pi$ a π . Per raggiungere questo obiettivo l'effetto combinato delle funzioni di trasferimento dei k filtri che compongono l'analizzatore deve corrispondere alla funzione di trasferimento di un filtro passa-tutto [Zoja, 1996b] [Zoja et al., 2019]:

$$H^{tot}(w) = \sum_{k=0}^K H_k(w) = 1, \quad \forall(w).$$

Di riflesso la sommatoria delle funzioni di risposta impulsive, $a_t^{(K)}$, dei filtri elementari deve coincidere con la funzione delta di Dirac, δ_t [Zoja, 1996b]

¹²È la risposta in frequenza di un sistema dinamico quando quest'ultimo è soggetto ad un ingresso a Delta di Dirac, ovvero una funzione che presenta equamente tutte le frequenze.

[Zoja et al., 2019]:

$$a_l^{tot} = \sum_{K=0}^K a_l^{(K)} = \delta_l = \begin{cases} 1, & \text{per } l = 0 \\ 0, & \text{per } l = \pm 1; \pm 2; \dots; \pm L \end{cases}$$

Date le seguenti caratteristiche dei filtri e dell'analizzatore bisogna concentrarsi sull'ottimizzazione della partizione dell'asse delle frequenze. Per farlo è necessario individuare un delicato equilibrio tra numero di filtri adoperati nell'analizzatore e la selettività dello stesso, in quanto tra le due caratteristiche esiste un rapporto proporzionale (una maggiore selettività implica un maggior numero di filtri). Il punto di partenza è l'identificazione e la scelta del filtro passa-basso e la determinazione del parametro K , dopodiché la specificazione degli altri filtri diviene immediata [Zoja, 1996b]. È doveroso ricordare che nella realtà, e dunque anche nel nostro caso, non è possibile agire con filtri "ideali" in quanto questi ultimi corrisponderebbero ad una matrice di Toeplitz di dimensioni infinite che non è possibile utilizzare se la serie presenta un numero finito, N , di osservazioni; Nonostante ciò, grazie ad un recente contributo di Barbieri et al. [2013] è stata dimostrata la possibilità di costruire un filtro con matrice $\sum_N(w_0)$ di dimensioni $N \times N$ finite, in cui come entrate si hanno delle funzioni sinc, che: «opera virtualmente come un filtro ideale con serie di lunghezza finita». [Faliva and Zoia, 2019]. L'azione di questa tipologia di filtro può essere rappresentata graficamente come segue:

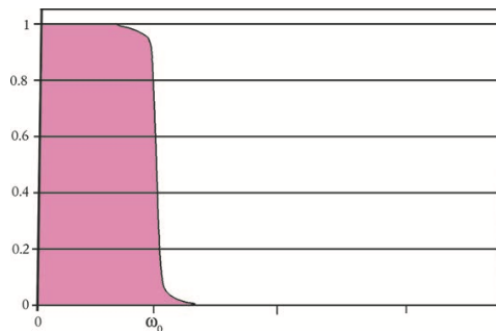


Figura 6: Funzione di trasferimento del filtro Faliva and Zoia [2019]

Come si può notare, rispetto alla funzione di trasferimento di un filtro “ideale”, $R_\alpha(w)$, non abbiamo un impulso esattamente rettangolare bensì leggermente smussato in quanto si ha un’attenuazione, seppur trascurabile, anche della parte di nostro interesse (il ciclo-trend). In ogni caso, come si può vedere, l’ampiezza corrisponde ad 1 nella parte in cui le frequenze angolari sono minori di α mentre corrisponde a 0 dove le frequenze angolari sono maggiori rispetto ad α . Per dimostrare il fatto che la matrice proposta dai tre autori “opera virtualmente come un filtro ideale” è necessario riprendere i principali passaggi che mettono in evidenza alcune relazioni importanti. In un primo momento, ricordando che $R_\alpha(w)$ corrisponde alla funzione di trasferimento di un filtro passa-basso ideale con frequenza di taglio α e viene rappresentato algebricamente come segue:

$$R_\alpha(w) = \begin{cases} 1 & \text{se } |w| < \alpha \\ 0 & \text{se } \alpha < |w| \leq \pi \end{cases} \quad (37)$$

e che la sequenza temporale a_t :

$$a_t = \frac{\alpha}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha}{\pi}t\right) \quad (38)$$

corrisponde alla funzione di risposta impulsiva dell’impulso rettangolare, si ha che:

$$a_t \iff R_\alpha(w)$$

Pertanto,

$$R_\alpha(w) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} a_\tau e^{iw\tau} = \frac{\alpha}{\pi} + 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha}{\pi}\tau\right) \cos(w\tau).$$

Grazie a Barbieri et al. [2013] è stata provata la seguente uguaglianza:

$$a_t * e^{iwt} = R_\alpha(w) * e^{iwt} \quad (39)$$

oppure

$$\mathbf{S}_{\alpha,\infty}\mathbf{e}_\infty = \mathbf{e}_\infty R_\alpha(w)$$

Dove $\mathbf{S}_{\alpha,\infty} = [s_{t,\tau}] = [\frac{\alpha}{\pi} \text{sinc}(\frac{\alpha}{\pi}(t - \tau))]$, e $\mathbf{e}_\infty = [e^{iwt}]$ è un vettore infinito dell'esponenziale complesso. Il termine $\mathbf{S}_{\alpha,\infty}$ agisce come IIR ¹³, ovvero come funzione di risposta impulsiva infinita, corrispondente ad un filtro passa-basso ideale con funzione di trasferimento $R_\alpha(w)$ e risulta essere una matrice di Toeplitz idempotente.[Barbieri et al., 2013] [Faliva, 1978]. Computazionalmente, per $N = 2M + 1$, cioè a seguito del troncamento della doppia matrice infinita $S_{\alpha,\infty}$ e del vettore infinito $e_\infty(w)$ si otterrà una submatrice:

$$\mathbf{S}_{\alpha,N(2M+1,2M+1)} = \frac{\alpha}{\pi} \sum_{\tau=-M}^M \text{sinc}(\frac{\alpha}{\pi}\tau) J^\tau + \frac{\alpha}{\pi} I + \sum_{\tau=-M}^M \text{sinc}(\frac{\alpha}{\pi}\tau) (J')^\tau. \quad (40)$$

tale che:

$$\mathbf{S}_{\alpha,\infty}\mathbf{e}_\infty \Rightarrow \mathbf{S}_{\alpha,N}\mathbf{e}_N \quad . \quad (41)$$

Nella formula della submatrice il termine J denota la cosiddetta “first subdiagonal unitary matrix”, ovvero una matrice le cui entrate sono tutte uguali a 0 eccetto quelle appena sotto la diagonale principale che hanno valore pari ad 1 [Barbieri et al., 2013]. Mentre J' corrisponde alla cosiddetta “first superdiagonal unitary matrix” quindi il contrario rispetto a prima. In questo caso le entrate sono tutte corrispondenti a 0 tranne per quelle appena sopra la diagonale principale che anche in questo caso assumeranno valore uguale ad 1 [Barbieri et al., 2013]. Andando a troncane la matrice di Toeplitz si va incontro al rischio di avere una distorsione in corrispondenza della frequenza nulla. Proprio per evitare la distorsione della frequenza nulla, la matrice

¹³Infinite impulse response.

vista in precedenza verrà moltiplicata per una matrice diagonale ¹⁴:

$$\sum_{\alpha,N} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{S}_{\alpha,N}$$

le cui entrate diagonali $d_{t,\tau}$ sono gli elementi s_τ , del seguente “row-sum vector”:

$$\mathbf{s} = \mathbf{S}_{\alpha,N} \mathbf{u}_N = [s_M s_{M-1} \dots s_0 \dots s_{-M+1} \dots s_{-M}]' \quad .$$

Riguardando le varie relazione sopra descritte si comprende che l’operatore $\sum_{\alpha,N}$ agisce come un filtro passa-basso ideale alla frequenza nulla [Barbieri et al., 2013], tant’è vero che può essere approssimato come segue:

$$\sum_{\alpha,N} e_N \approx e_N R_{\alpha,N}(w)$$

La matrice $\sum_{\alpha,N}$ è di fondamentale importanza in quanto si dimostra in grado di identificare la componente latente banda-limitata, ovvero p . Infatti se viene moltiplicata per la serie storica, x , permette di stimare la componente di fondo, \hat{p} , la quale, se le viene sommata la componente erratica, ε , ci riconduce alla componente latente di nostro interesse p . Algebricamente l’azione dell’operatore può essere rappresenta come segue:

$$p = \underbrace{\sum_{\alpha,N}}_{\hat{p}} x + \varepsilon \quad . \quad (42)$$

Affinché sia possibile identificare ed estrapolare solo la componente desiderata è necessario individuare delle matrici che presentino una frequenza di taglio, α , appropriata. Per identificarla è doveroso definire, come anticipato nel capitolo precedente, le bande di frequenza associate alle varie componenti così che, sfruttando una semplice formula, sia possibile identificare le frequenze di soglia delle varie componenti [Faliva and Zoia, 2019].

¹⁴È una matrice quadrata, cioè con stesso numero di righe e di colonne, in cui solamente i valori sulla diagonale principale possono essere diversi da 0.

Algebricamente:

$$|w| = \frac{2\pi}{yT}$$

dove $|w|$ rappresenta le frequenze di banda, y rappresenta il valore di soglia in anni ¹⁵ e T corrisponde alle osservazioni per anno ¹⁶. Una volta calcolate le gamme di frequenze angolari di pertinenza, $|w|$, saremo in grado di collocare le diverse componenti nel dominio delle frequenze, come nell'esempio di seguito (frequenze calcolate sulla base di $T=4$ e delle seguenti soglie temporali: $f_t=12$ anni, $c_t=$ da 3 a 12 anni, $s_t=$ da 1 anno a π):

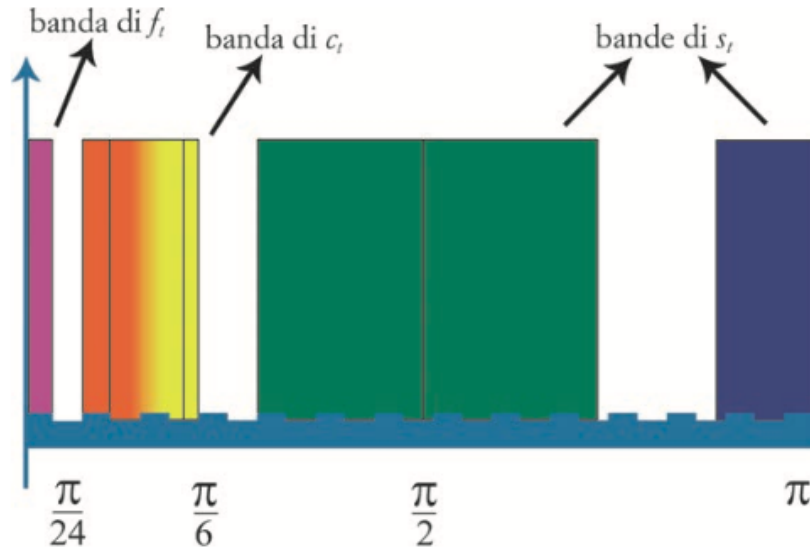


Figura 7: Collocazione delle componenti nel dominio delle frequenze con riferimento al semi-asse positivo[Faliva and Zoia, 2019]

Una volta effettuato questo passaggio bisogna selezionare la frequenza di taglio adatta all'enucleazione del TC, con riferimento alla Figura 7 corrispondente ad $\alpha = \frac{\pi}{6}$. In questo modo si giunge ad una matrice di Toeplitz del

¹⁵Per esempio la componente di fondo può corrispondere ad un valore di soglia pari a 12 anni.

¹⁶Tipicamente sono trimestrali, e dunque avremo $T=4$ o mensili e quindi $T=12$.

tipo:

$$\sum_N \left(\frac{\pi}{6}\right)$$

che se viene moltiplicata per la serie di riferimento permette di isolare la componente tendenziale e congiunturale. È facilmente intuibile il fatto che N corrisponde al numero di osservazioni della serie mentre il termine circoscritto tra le parentesi tonde corrisponde ad α , ovvero la frequenza di taglio [Faliva and Zoia, 2019]. Tale operatore, come visto precedentemente, è caratterizzato da dimensioni finite, al contrario di un filtro passa-basso ideale che si contraddistingue per le dimensioni infinite. Ciononostante è comunque in grado di operare virtualmente come un filtro passa-basso ideale¹⁷ [Barbieri et al., 2013] [Faliva and Zoia, 2019].

¹⁷Aspetto dimostrato dalle relazioni messe in luce nella prima parte della seguente sezione.

4 Applicazione

Nel seguente capitolo andremo ad applicare nel concreto lo strumento analizzato precedentemente e messo a punto da Barbieri et al. [2013]. Sfruttando un codice fornito dalla prof.ssa Nava scritto in R, un linguaggio di programmazione e un ambiente di sviluppo specifico per l'analisi statistica dei dati, l'applicazione del filtro studiato verrà proposta con riferimento a tre serie storiche dell'indice della produzione industriale: Italia, UK e USA. Una volta studiato il ciclo-trend di queste tre serie, effettueremo un confronto con un'altra metodologia di estrazione proposta dalla letteratura, ovvero il filtro di Hodrick-Prescott, per evidenziare eventuali differenze o similitudini. Con riferimento a Italia, UK e USA (trattati in tre sezioni differenti) verranno effettuati i medesimi passaggi per l'applicazione:

1. *Reperimento dei dati*: chiaramente è stato necessario reperire le serie storiche dell'indice della produzione industriale dei tre paesi in modo da avere a disposizione i dati per effettuare lo studio. Questi ultimi devono essere di un numero adeguato e per questo motivo andremo a lavorare con delle serie storiche trimestrali di lunghezza pari a 60 anni (dal primo trimestre del 1960 al secondo trimestre del 2020) per un totale di 242 osservazioni.
2. *Filtro la serie grezza*: vado a filtrare la serie grezza in modo tale da stimare il trend.
3. *Stabilisco le funzioni di trasferimento per l'analizzatore di spettro normalizzate*: nel nostro caso specifico utilizzeremo una metodologia che ci permette di ottenere un ε praticamente nullo, questo grazie ad una leggera decrescenza delle canne dello spettro che ci permette di evitare grandi errori. Bisogna sottolineare che i vari grafici che otterremo delle funzioni di trasferimento dell'analizzatore di spettro risulteranno uguali in tutti e tre i casi in quanto si adopererà il medesimo modello.

4. *Calcolo lo spettro di potenza della serie grezza*: facendolo saremo in grado di identificare le caratteristiche della serie in esame e gli addensamenti di potenza corrispondenti alle gamme di frequenza di pertinenza delle diverse componenti elementari. In questo modo, saremo anche in grado di individuare la migliore metodologia di filtraggio, ed in particolare il numero di canne dello spettro da tenere in considerazione per ottenere il miglior risultato possibile.
5. *Estrazione del ciclo-trend*: grazie ai passaggi svolti in precedenza sarà possibile andare ad estrarre la componente di nostro interesse stabilendo la miglior frequenza di taglio sulla base delle caratteristiche della serie.

Questo capitolo sarà sviluppato come segue: avremo le prime tre sezioni in cui applicheremo lo strumento sopra descritto ai tre paesi oggetto di analisi. Per ciascuno procederemo con i passaggi fondamentali visti in precedenza e cercheremo di dare una lettura dei grafici in chiave economica in modo tale da poter fare anche un breve confronto nelle conclusioni. Nella quarta sezione invece introdurremo brevemente il filtro di Hodrick-Prescott, strumento molto popolare nel mondo economico/econometrico e non solo, e andremo poi ad applicarlo, sempre alle tre realtà, così da poter poi confrontare i risultati ottenuti mediante le diverse tecniche di filtraggio.

4.1 Indice della produzione industriale italiana

Come anticipato nel preambolo di questo capitolo, lavoreremo su una serie storica trimestrale, in questo caso l'indice della produzione industriale italiana relativa al periodo che va dal 1960 ad oggi, con base 2015. In primo luogo andremo a filtrare la serie grezza in modo tale da stimare la componente di lungo termine, f_t , della serie, in questo caso corrispondente alla seguente rappresentazione:

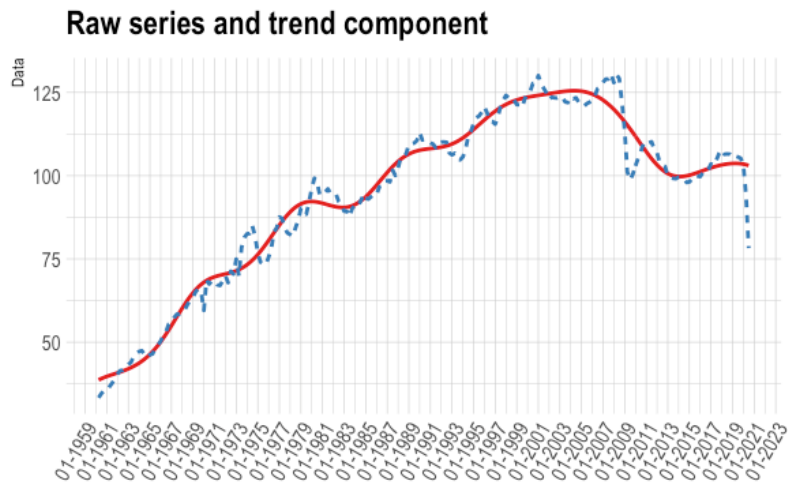


Figura 8: Trend nella serie storica grezza

Dopodiché attraverso l'analizzatore di spettro, che come abbiamo già visto opera in modo simultaneo, ed in particolare le funzioni di trasferimento normalizzate, andiamo ad operare una sequenza di trasformazioni sulla serie oggetto di studio. In questo modo otterremo come output una sequenza di serie derivate, ciascuna delle quali riflette la dinamica di una specifica componente di frequenza.

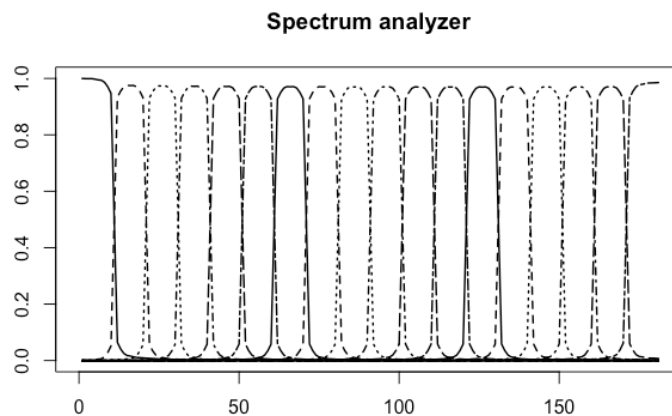


Figura 9: Analizzatore di spettro

Nel concreto ci focalizziamo sulla funzione di trasferimento del primo filtro dell'analizzatore, ovvero il filtro passa-basso:

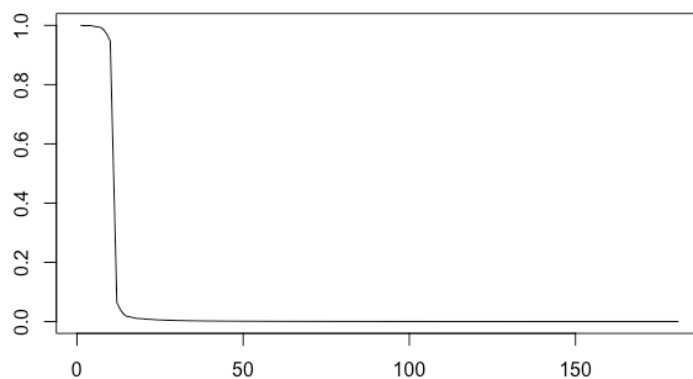


Figura 10: Funzione di trasferimento del filtro passa-basso dell'analizzatore

Grazie all'utilizzo di questo strumento riusciamo ad ottenere lo spettro stilizzato della serie grezza che ci permette di capire le caratteristiche della serie. Inoltre, siamo in grado di dimostrare che applicando l'analizzatore di spettro non si perde ¹⁸ quasi nulla rispetto alla serie di partenza, infatti si commette un errore veramente minimo sull'intero arco delle frequenze:

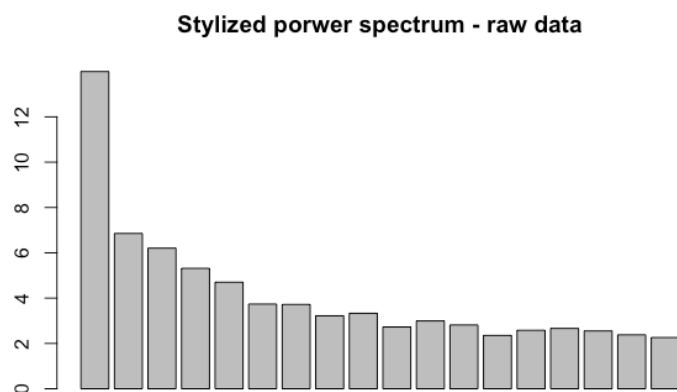


Figura 11: Spettro stilizzato della serie grezza

¹⁸In termini di contributo in potenza/variabilità della serie.

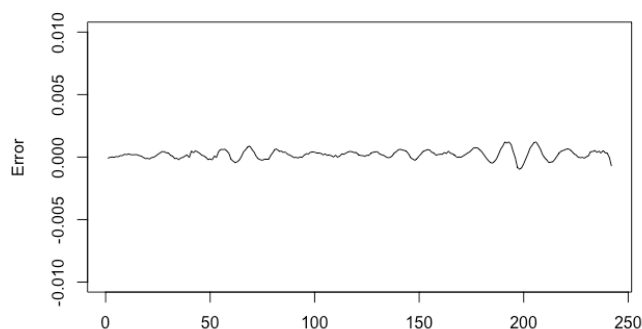


Figura 12: Errore collegato all'utilizzo dell'analizzatore di spettro

Analizzando la figura 11, cioè lo spettro stilizzato della serie grezza, è possibile identificare il ruolo che viene svolto dalle diverse bande di frequenze nella formazione della variabilità complessiva della serie. Inoltre, si riesce a capire il numero di canne che caratterizzano la componente ciclo-trend permettendoci di assegnare la giusta frequenza di taglio al filtro in modo tale da decomporre la serie storica e stimare le componenti elementari che la compongono. In questo caso la rappresentazione grafica della componente ciclo-trend, associata ai primi quattro output dell'analizzatore di spettro, cioè alle prime quattro canne, risulta essere la seguente:

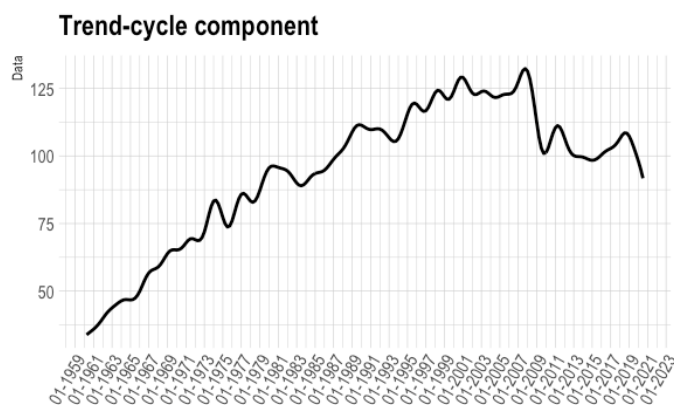


Figura 13: Componente ciclo-trend dell'indice della produzione industriale italiana

Una volta enucleata la componente di nostro interesse dalla serie, è possibile effettuare alcune considerazioni dal punto di vista economico. In primo luogo si può notare come la produzione industriale sia aumentata rispetto al periodo di partenza dell'analisi, ovvero il 1960, passando da un valore di 33,319 nel primo semestre del 1960 ad un valore di 130,556 raggiunto nel terzo trimestre del 2007. Questo dato testimonia come l'IPI abbia avuto un trend in crescita fino al 2007, anno in cui, a seguito della crisi conosciuta come la grande recessione ¹⁹, si è registrata una forte decrescita della produzione (-24,4%). Nello specifico la riduzione dell'indice è stata causata dalla diminuzione delle esportazioni del paese, combinata ad una riduzione della domanda interna. Come si può vedere dal grafico però gli ultimi 15 anni non mostrano dati confortanti e questo aspetto non è solamente dovuto dalla crisi del 2007/2008 ma anche da altri due avvenimenti: la recessione del 2011, dovuta da un'importante contrazione della domanda interna e, soprattutto, nei primi due semestri del 2020 dall'emergenza sanitaria mondiale. Quest'ultima ha causato una riduzione della produzione industriale fino ad un valore intorno a 75, cioè pari alla produzione che si aveva nel 1975.

¹⁹Tale crisi economica è stata causata dallo scoppio di una bolla immobiliare che ha provocato una grave crisi finanziaria agli USA e che si è poi ripercossa in gran parte del mondo.

4.2 Indice della produzione industriale britannica

Ora sposteremo la nostra analisi sull'indice della produzione industriale britannica utilizzando come input sempre una serie storica reattiva al periodo dal 1960 al secondo trimestre del 2020, con cadenza delle osservazioni trimestrale (per un totale di $N=242$). Il punto di partenza sarà sempre il filtraggio della serie grezza per ottenere la stima del ciclo-trend, che risulta essere la seguente:

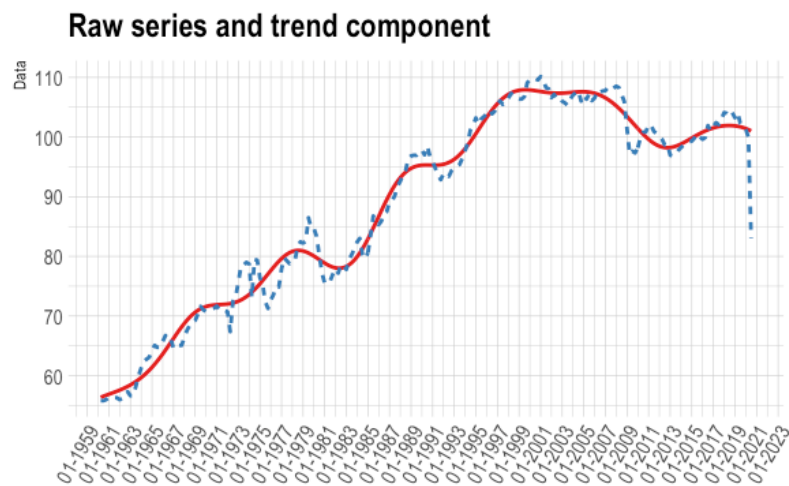


Figura 14: Trend nella serie storica grezza

Non saranno riportati nuovamente i grafici delle funzioni di trasferimento normalizzate dell'analizzatore di spettro e della funzione di trasferimento del passa-basso in quanto risultano identici al caso precedente dato l'utilizzo della medesima tecnica di filtraggio. Andiamo invece a riportare e focalizzarci sul grafico, ottenuto mediante l'utilizzo dell'analizzatore, dello spettro stilizzato della serie grezza per trovare anche qui la migliore soluzione. Inoltre, come prima, siamo in grado di dimostrare che il risultato che si ottiene mediante l'analizzatore presenta un errore praticamente nullo sull'intero arco delle frequenze.

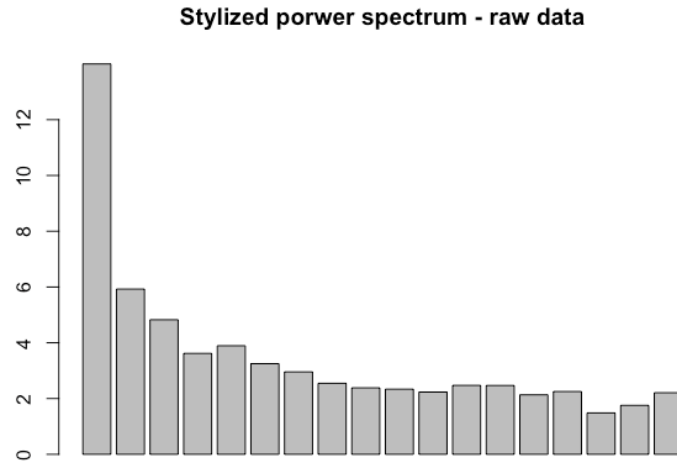


Figura 15: Spettro stilizzato della serie grezza

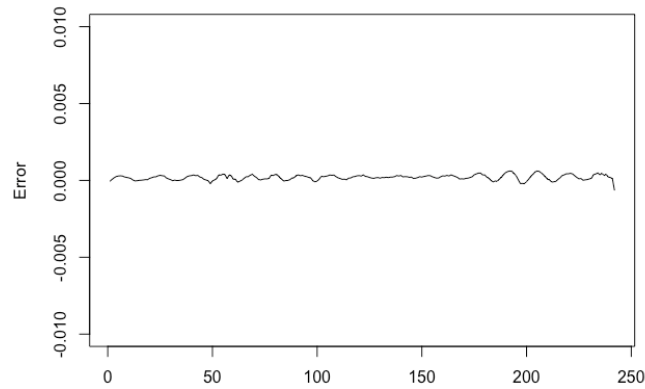


Figura 16: Errore collegato all'utilizzo dell'analizzatore di spettro

In questo caso il numero di canne dello spettro che caratterizzano il ciclo-trend sono le prime 3²⁰, e questo ci consente di modificare il cut off per estrarre la componente. La rappresentazione grafica della componente ciclo-trend associata ai primi 3 output dell'analizzatore di spettro è la seguente:

²⁰Prima corrispondeva a 4.

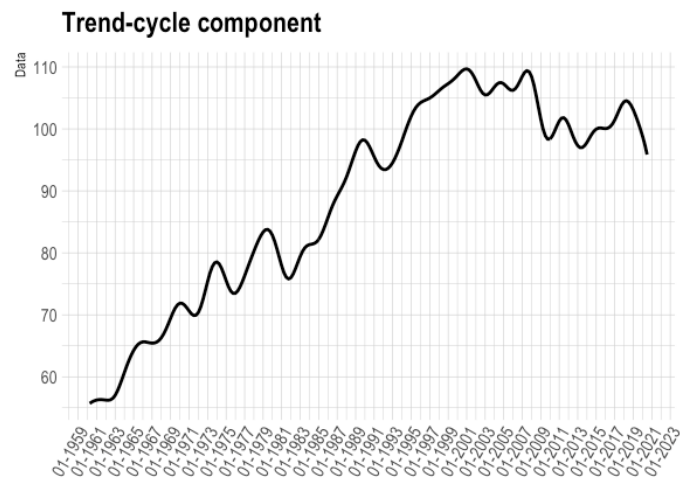


Figura 17: Componente ciclo-trend dell'indice della produzione industriale UK

Una volta estratta la componente, così come fatto per l'Italia, è possibile interpretare il grafico da un punto di vista economico. In prima battuta si può notare come l'indice della produzione industriale sia aumentato nel corso degli anni: è partito da un valore di 55,804 nel primo trimestre del 1960 fino ad un valore massimo pari a 110,148 raggiunto nel quarto trimestre del 2000. Dopo questo apice l'indice è stato piuttosto stabile fino al 2007/2008 anno in cui, a causa della grande recessione di cui abbiamo già parlato, anche in UK si è verificato un grande calo della produzione passando da 108,53 a 97,3365 (riduzione dell'11% circa). Come si nota dal grafico anche nel 2011 vi è un ulteriore calo dell'indice causato dalla crisi (in particolare dalla riduzione della domanda interna) che ha portato l'indice a 96,8308. In ogni caso ciò che preoccupa maggiormente risulta essere il forte calo dell'indice nei primi 2 semestri del 2020, arrivato a 83,0074 (valore che si aveva già intorno al 1985), ciò è dovuto dall'emergenza sanitaria mondiale per la diffusione del COVID-19.

4.3 Indice della produzione industriale statunitense

In quest'ultima sezione della prima parte del capitolo applicativo la nostra attenzione si rivolgerà agli Stati Uniti d'America dato che lavoreremo con la serie storica dell'indice della produzione industriale americana. Le caratteristiche della serie sono sempre le medesime, ovvero una lunghezza di 60 anni e due semestri per un totale di 242 osservazioni. Andando a filtrare la serie grezza otteniamo, così come negli altri due casi visti in precedenza, la stima della componente di fondo, che può essere rappresentata dal seguente grafico:

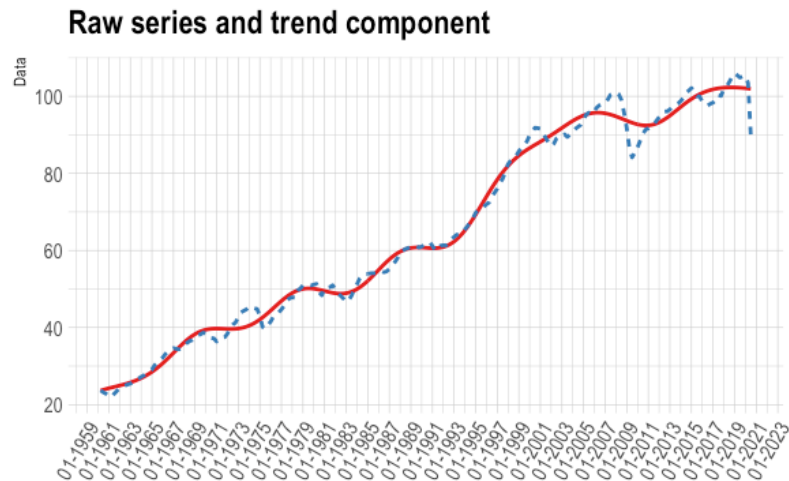


Figura 18: Trend nella serie storica grezza

Non riporteremo neanche qui i grafici delle funzioni di trasferimento normalizzate dell'analizzatore di spettro e della funzione di trasferimento del filtro passa-basso ²¹ per non essere ripetitivi essendo i grafici uguali a quelli riportati per il caso italiano. Ad ogni modo, seguendo le procedure adoperate nelle altre due sezioni, andremo ad osservare lo spettro stilizzato della serie grezza per capire i contributi delle varie componenti ed identificare il migliore cut off per l'estrazione del ciclo trend.

²¹Corrisponde al primo filtro dell'analizzatore.

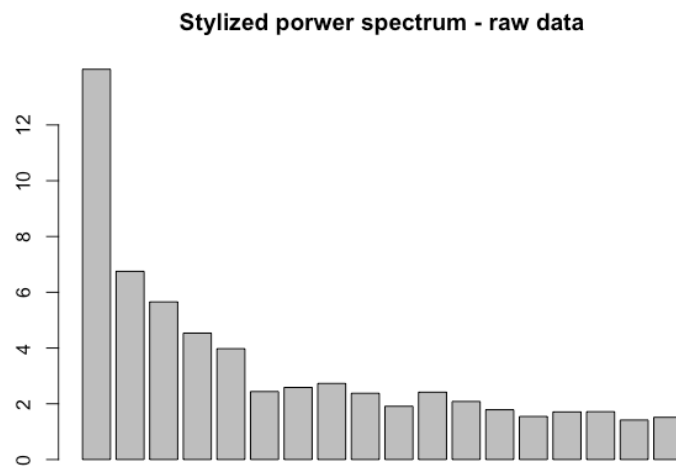


Figura 19: Spettro stilizzato della serie grezza

Ovviamente anche per gli USA siamo in grado di dimostare che l'applicazione dell'analizzatore di spettro ci permette di ottenere un errore praticamente nullo sull'intero arco delle frequenze, come si nota dal seguente grafico:

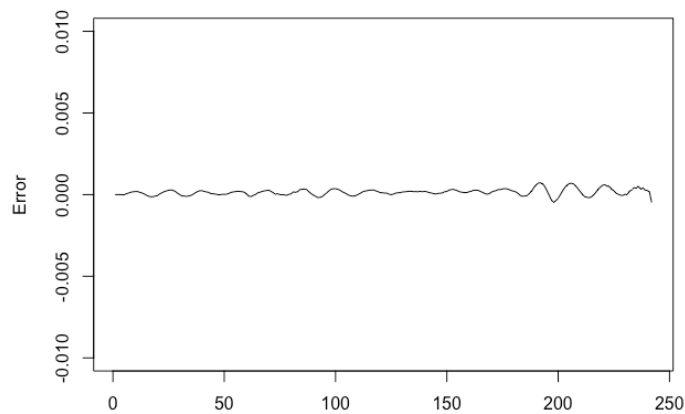


Figura 20: Errore collegato all'utilizzo dell'analizzatore di spettro

In questo caso il numero di canne dello spettro che caratterizzano il ciclo-

trend sono le prime 3 ²², consentendoci così di fissare il cut off per estrarre la componente. La rappresentazione grafica della componente ciclo-trend, associata ai primi 3 output dell'analizzatore di spettro, è la seguente:

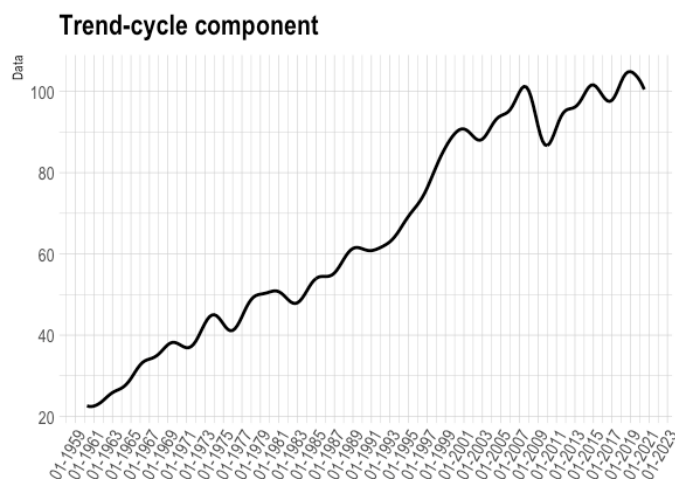


Figura 21: Componente ciclo-trend dell'indice della produzione industriale USA

Analizzando il grafico e cercando di interpretarlo in chiave economica, si può osservare un trend dell'indice in crescita: il valore di partenza, corrispondente al primo semestre del 1960, è pari a 23,6999 e ha raggiunto il suo apice nel quarto semestre del 2018 con un valore di 105,968. Una decrescita molto marcata si è avuta intorno al 2007/2008 (per le cause che già conosciamo), con una riduzione dell'indice intorno al 17% (si è passati da 101 a 84,139). Il paese però, come si può notare, ha risposto molto bene a questa crisi ed è stato in grado di riprendere un percorso di crescita che è culminato con il valore massimo raggiunto nel 2018. Negli ultimi mesi però, anche gli USA hanno dovuto fare il conto con il virus che sta spaventando il mondo intero, tant'è vero che i primi due semestri del 2020 hanno evidenziato una contrazione dell'IPI notevole.

²²uguale all'applicazione per UK

4.4 Filtro di Hodrick-Prescott

In questa sezione analizzeremo le caratteristiche principali di questo filtro nato intorno al 1923 per mano di ET Whittaker ma, reso popolare soltanto intorno al 1990 grazie alla sua applicazione in campo economico da parte degli economisti: Robert J.Hodrick e Edward C. Prescott. Questo breve approfondimento ci servirà in quanto andremo ad applicare questo strumento alle diverse serie storiche affinché sia possibile confrontare le tre realtà. Tale strumento matematico viene utilizzato per ottenere una rappresentazione a curva smussata²³ di una serie temporale, più sensibile alle fluttuazioni di lungo periodo che a quelle di breve termine [Ahumada and Garegnani, 1999]. Esso si basa sull'assunzione che una serie seasonally adjusted²⁴ risulta essere la somma tra una componente di tendenza o di crescita, τ_t , ed una componente ciclica, c_t , che sono fra loro indipendenti[Ravn and Uhlig, 2002]:

$$x_t = \tau_t + c_t \quad t = 1, \dots, T. \quad (43)$$

Vi sono delle ipotesi su cui si basa questa tipologia di filtro:

1. La deviazione della serie, x_t , dalla componente di crescita, τ_t , converge a 0 nel lungo periodo (nel lungo periodo dunque non avremo deviazione fra la serie e la componente di tendenza).
2. Il trend, rispetto alla componente ciclica c_t , varia nel tempo in maniera smooth.

Detto ciò, dato un certo valore positivo λ , ci sarà una componente di tendenza in grado di risolvere la seguente equazione:

$$\min_{\tau} \sum_{t=1}^T (x_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2. \quad (44)$$

²³Viene eliminata la presenza di fluttuazioni in modo da ottenere una curva "liscia".

²⁴Serie destagionalizzata, ovvero viene eliminata dalla serie la componente stagionale.

Il primo termine dell'equazione (44) non è altro che la somma delle deviazioni al quadrato e quest'ultimo penalizza la componente ciclica. Il secondo termine invece è un multiplo, λ , delle differenze seconde della componente di tendenza e penalizza le variazioni del tasso di crescita della componente tendenziale. Nello specifico, maggiore è il valore di λ e maggiore sarà la penalità. I due economisti, Hodrick e Prescott, suggeriscono di attribuire a λ un valore pari a 1600 se si tratta di dati trimestrali come nel nostro caso [Ahumada and Garegnani, 1999, Ravn and Uhlig, 2002].

Filtraggio con il metodo Hodrick-Prescott dell'IPI Italiano: la rappresentazione grafica del trend che si ottiene filtrando la serie italiana con il filtro di Hodrick-Prescott è la seguente:

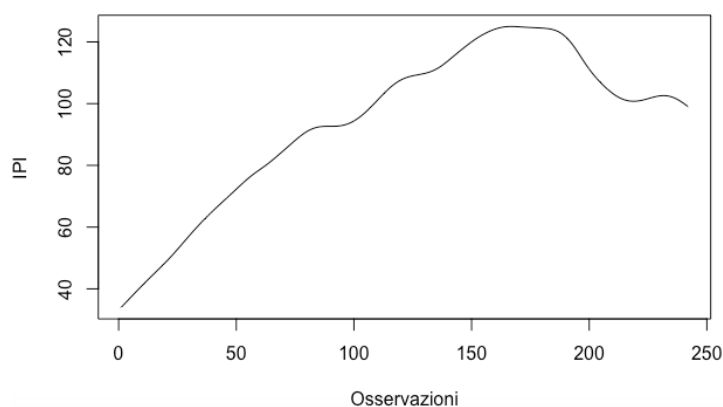


Figura 22: Stima del trend attraverso il filtro HP sull'IPI italiano.

Confrontando il risultato ottenuto nella figura 22 con la figura 8, si può notare come i due grafici siano molto simili fra loro ma allo stesso tempo come attraverso il filtro di Hodrick-Prescott si ottenga una curva, rappresentativa del trend, ancora più liscia e smussata. Questo poichè, come anticipato, il filtro tende ad eliminare le fluttuazioni che caratterizzano la serie per ottenere una curva smooth.

Filtraggio con il metodo Hodrick-Prescott dell'IPI Inglese: il medesimo filtro è stato applicato alla serie storica britannica per estrarre il trend.

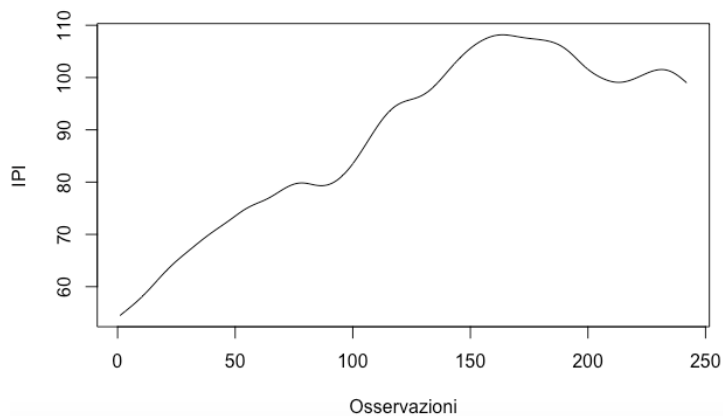


Figura 23: Stima del trend attraverso il filtro HP sull'IPI britannico.

Dalla figura 23, confrontandola con la figura 14 (ottenuta mediante la tecnica di filtraggio di Barbieri et al. [2013]) si nota, come nel caso italiano, una somiglianza molto forte nonostante si osservi una curva più liscia. Qui però i due grafici sono ancora più simili fra loro, questo poiché come frequenza di taglio della metodologia di Barbieri et al. [2013] sono state usate le prime tre canne dell'analizzatore e non le prime quattro come nel caso italiano. Questo aspetto porta ad ottenere una stima della componente più smussata e quindi ancora più simile a quanto si ottiene mediante l'applicazione del filtro di Hodrick-Prescott.

Filtraggio con il metodo Hodrick-Prescott dell'IPI Americano: analogamente a quanto fatto per gli altri due paesi, anche la serie storica statunitense è stata oggetto di filtraggio per la stima del trend con lo strumento proposto da Hodrick-Prescott:

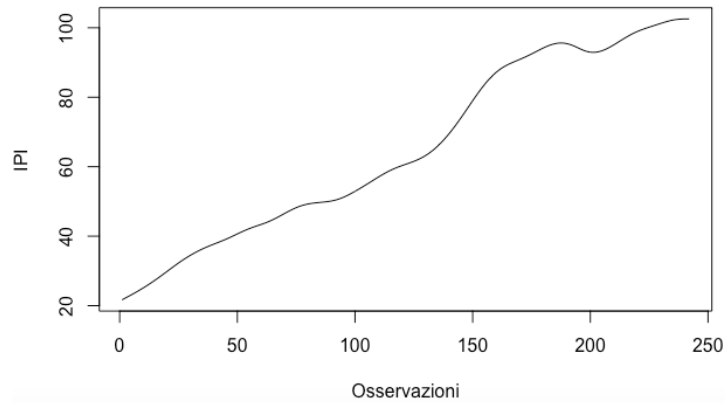


Figura 24: Stima del trend attraverso il filtro HP sull'IPI statunitense

Confrontando la figura 24 con la figura 18 si possono osservare le stesse caratteristiche evidenziate per Italia e Inghilterra. La stima del trend, infatti, risulta essere molto simile tra le due tecniche di analisi seppur si noti una curva più liscia con riferimento al filtro di Hodrick-Prescott. Questa caratteristica evidenzia uno degli aspetti fondamentali del filtro di Hodrick-Prescott che in genere tende ad essere eccessivamente smooth e quindi a cogliere meno quelle che sono le componenti di medio periodo, rispetto invece al filtro qui analizzato.

5 Conclusioni

Nel presente lavoro è stata illustrata un'innovativa tecnica di filtraggio non-parametrica per la decomposizione delle serie storiche e per l'enucleazione del ciclo-trend, messa a punto da Barbieri et al. [2013]. La procedura, oggetto di analisi, opera in ottica frequenziale in quanto si è più idonea rispetto al dominio temporale per i motivi di seguito spiegati. In primis, lavorando nel dominio delle frequenze, è possibile ottenere calcoli più semplici che ci possono aiutare nel momento dell'analisi ed inoltre ci consente di mettere in luce alcune caratteristiche della serie che altrimenti non sarebbero identificabili. La metodologia esposta sfrutta uno strumento ad hoc che ormai conosciamo bene, cioè l'analizzatore di spettro, che si sostanzia in un dispositivo costituito da K filtri (un passa-basso e k filtri passa-banda) in grado di rilevare e quantificare gli addensamenti di potenza corrispondenti alle diverse componenti elementari grazie alle gamme di frequenza identificative proposte da Faliva and Zoia [2019]. Nelle applicazioni dello strumento che sono state presentate, con riferimento a tre serie storiche differenti, è stato illustrato come il ricorso all'utilizzo dello spettro stilizzato possa risultare molto efficace per l'individuazione della miglior procedura di estrazione del ciclo-trend, tenendo in considerazione la struttura della serie. Osservando i risultati ottenuti, con riferimento ai tre paesi, nel capitolo applicativo è emerso che l'indice della produzione industriale di Italia, UK e USA ha un comportamento molto simile dal punto di vista del ciclo-trend. Infatti, tutti e tre i paesi hanno evidenziato un trend in crescita, seppur con valori leggermente diversi tra loro, fino al 2007/2008. In quegli anni infatti a causa della grande crisi che ha colpito il mondo intero, gli indici hanno avuto una grande riduzione. A seguito di questo periodo però si può notare una differenza tra UK, Italia e gli USA, in quanto questi ultimi sono riusciti a riprendere il trend in crescita mentre Italia e UK ancora oggi si trovano di fronte ad una situazione in cui l'indice è in decrescita. Addirittura in Italia si è giunti ad un valore che corrisponde a quello della produzione industriale italiana del 1975. Questo ci

permette di capire che il paese è affetto da una crisi strutturale che richiede l'intervento attraverso misure forti, e non più semplici dichiarazioni positive.

Riferimenti bibliografici

- Hildegart Ahumada and María Lorena Garegnani. Hodrick-prescott filter in practice. In *IV Jornadas de Economía Monetaria e Internacional (La Plata, 1999)*, 1999.
- Laura Barbieri, Mario Faliva, and Maria Grazia Zoia. Band-limited component estimation in time-limited economic series. *Journal of Applied Statistics*, 40(9):2009–2023, 2013.
- Mario Faliva. Optimal filtering for seasonal adjustment of quarterly data. *Rivista Internazionale di scienze sociali*, 49(Fasc. 1):55–86, 1978.
- Mario Faliva and Maria Grazia Zoia. Econometria: Istanze dell’economia e parallelismi con le scienze naturali. *Istituto Lombardo-Accademia di Scienze e Lettere-Incontri di Studio*, pages 91–102, 2008.
- Mario Faliva and Maria Grazia Zoia. Componente di fondo e componenti cicliche dell’indice della produzione industriale in italia. *Istituto Lombardo-Accademia di Scienze e Lettere-Rendiconti di Lettere*, 2019.
- Athanasios Papoulis. The fourier integral and its applications. *Polytechnic Institute of Brooklyn, McCraw-Hill Book Company Inc., USA, ISBN: 67-048447-3*, 1962.
- Morten O Ravn and Harald Uhlig. On adjusting the hodrick-prescott filter for the frequency of observations. *Review of economics and statistics*, 84(2):371–376, 2002.
- Luigi Santamaria. *Analisi statistica delle serie storiche economiche*. Vita e pensiero, 2000.
- Maria Grazia Zoia. Identificazione e stima delle componenti caratteristiche delle serie economiche. *Monografie dell’Istituto di Econometria e Matematica dell’Università Cattolica di Milano*, 1996a.

Maria Grazia Zoia. La nozione di spettro stilizzato nell'analisi delle serie storiche. *Statistica*, 56(1):103–127, 1996b.

Maria Grazia Zoia, Laura Barbieri, and Luca Bagnato. An insight into the italian economy from an analysis based on the industrial production index in both frequency and time domains. *Metroeconomica*, 70(4):688–710, 2019.