UNIVERSITÀ DELLA VALLE D'AOSTA
UNIVERSITÉ DE LA VALLÉE D'AOSTE

DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE E POLITICHE
DÉPARTEMENTS DES SCIENCES ÉCONOMIQUES ET POLITIQUES

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE DELL'ECONOMIA E DELLA GESTIONE AZIENDALE

ANNO ACCADEMICO
2019/2020

" Analisi Comparativa delle Strategie di Portafoglio Global Minimum Variance e Most Diversified"

DOCENTE 1° relatore: Prof. Maria Debora Braga

STUDENTE: Andrea Adriano Sposato
MATRICOLA:17 C05 538

INDICE

INTRODUZIONE .... ERRORE. IL SEGNALIBRO NON È DEFINITO.

1. L'ASSET ALLOCATION TRADIZIONALE: METODOLOGIA E CRITICITÀERRORE. IL SEGNALIBRO NON È DEFINITO.

1.1 LA REALIZZAZIONE DELLA STRATEGIA FINANZIARIA IN BASE ALL'APPROCCIO TOP-DOWN *4*

1.2 L'ASSET ALLOCATION STRATEGICA E LE ASSET CLASS.. *6*

1.3 GLI INPUT NECESSARI ALLA COSTRUZIONE DI UN PORTAFOGLIO FINANZIARIO *8*

1.4 ASSET ALLOCATION STRATEGICA SECONDO LA "MEAN-VARIANCE OPTIMIZATION".................................... *15*

1.5 IPOTESI BASE DELLA MVO *21*

1.6 PROBLEMATICHE RELATIVE ALLA MVO: ESTIMATION RISK *27*

2 L'ASSET ALLOCATION SECONDO LA STRATEGIA GLOBAL MINIMUM VARIANCE (GMVP) E SECONDO LA MOST DIVERSIFIED PORTFOLIO STARTEGY (MDP) **31**

2.1 INTRODUZIONE ALLE μ-FREE STRATEGIES *31*

2.2 DECOMPOSIZIONE DEL RISCHIO DI PORTAFOGLIO.. *34*

2.3 GLOBAL MINIMUM VARIANCE PORTFOLIO *40*

2.4 MOST DIVERSIFIED PORTFOLIO *46*

2.5 GMVP E MDP: QUALE TIPO DI INVESTITORE.. *51*

3 APPLICAZIONE E CONFRONTO DELLE STRATEGIE GMVP E MDP **53**

3.1 IMPOSTAZIONE ED IMPLEMENTAZIONE DELLA VERIFICA EMPIRICA 53

3.2 ANALISI DELL'OUTPUT 55

3.2.1 Analisi dell'output: Redditività.. *55*

3.2.2 Analisi dell'output: *57*

3.2.3 Analisi dell'output: Risk-adjusted performance *59*

CONCLUSIONE **63**

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA **66**

INTRODUZIONE

Il presente elaborato nasce dalla volontà di affrontare il tema dell'*asset allocation strategica* proponendo un confronto tra due strategie di investimento rientranti nel novero delle "*μ-free strategies*": la strategia *Global Minimum Variance Portfolio* e la *Most Diversified Portfolio* strategy. Il confronto avrà luogo in due fasi distinte: d'apprima sotto il profilo teorico, andando ad indagare le giustificazioni teoriche alla base delle citate strategie di investimento e del contesto in cui vengono definite. In un secondo, momento si procederà ad impostare un confronto empirico tra le strategie, attraverso un'applicazione di esse nell'ambito di problema di *asset allocation* a livello globale basato su un periodo d'osservazione dei dati pari a 20 anni.

Il lavoro è articolato in 3 principali capitoli: il primo capitolo inquadra l'ambito di riferimento definendo le fasi di costruzione di un portafoglio finanziario secondo l'"approccio *top-down*", soffermandosi principalmente sul processo di *strategic asset allocation* e sugli input necessari alla sua implementazione. Particolare attenzione verrà posta al modello "Mean-Variance Optimization" proposto da Markowitz nel 1952, che rappresenta una colonna portante della *Modern Portfolio Theory* e configura il *framework* nel quale vengono sviluppate le strategie GMVP e MDP. Il capitolo termina con la discussione dei pregi e dei limiti del modello.

Il secondo capitolo formalizza il concetto di "μ-free strategies" e ne giustifica l'esistenza basandosi sulle conclusioni del capitolo precedente. Viene qui trattato il tema della decomposizione del rischio di portafoglio e vengono definite le caratteristiche delle strategie GMVP e MDP: queste vengono infatti trattate in termini analitici, viene discussa la logica finanziaria sottostante ad ognuna di esse e viene proposto un inquadramento del potenziale tipo di investitore al quale esse più si rivolgono.

Il terzo ed ultimo capitolo documenterà il lavoro di analisi dei dati ed implementazione delle strategie effettuato ai fini del confronto. Esso illustra la logica e le fasi della verifica empirica condotta, fasi che risultano essere: l'analisi dei rendimenti prodotti da 9 *asset class* a livello globale nell'ultimo ventennio; la costruzione e l'implementazione delle strategie di investimento secondo il "metodo rolling" sulla base dei dati analizzati; la valutazione oggettiva delle strategie in ottica ex-post, sulla base di indicatori appositamente costruiti. L'elaborato termina con alcune considerazioni conclusive sui risultati ottenuti e sul lavoro svolto.

1. L’ASSET ALLOCATION TRADIZIONALE: METODOLOGIA E CRITICITA’

1.1. La realizzazione della strategia finanziaria in base all’approccio top-down.

Esistono due metodi alternativi in base ai quali può essere formalizzata una strategia finanziaria: l’approccio *top-down* e l’approccio *bottom-up.* Secondo l’approccio *bottom-up*, il processo di investimento è incentrato sulla selezione di singoli titoli, valutati attraverso specifici criteri di selezione (alcuni esempi noti sono l’analisi dei fondamentali delle società e le analisi settoriali), il cui insieme andrà a costituire il portafoglio mobiliare. L’approccio alternativo *top-down,* al contrario, vede come primo e fondamentale step la selezione di alcune macro-categorie di investimento (“*asset class*”) in cui sarà ripartito il capitale oggetto di investimento e, solamente in un secondo momento vengono selezionati, all’interno delle sopracitate asset class, gli strumenti finanziari specifici in cui verranno concretamente investite le risorse finanziarie. Un celebre modello che fonda la propria applicazione sull’approccio *top-down* è la *Mean-Variance Optimization* elaborata da Markowitz nel 1952. In questo contributo, l’attenzione è rivolta a questa seconda tipologia di processo di investimento e, in particolare, all’attività di *asset allocation strategica* che ne costituisce il punto di avvio e che ammette diversi criteri e logiche di implementazione analizzabili anche in chiave comparativa.

E’ bene ricordare che l’approccio di tipo *top-down* rappresenta la prassi nelle logiche di investimento degli investitori istituzionali (fondi pensione, fondazioni…) per una serie di motivazioni che la rendono più adatta alla costruzione di portafogli ottimi/efficienti. Queste motivazioni riguardano principalmente logiche statistiche, secondo le quali:
- la stima del rendimento atteso delle *asset class* soffre in media di margini di errore inferiori rispetto alla stima di rendimento atteso di singoli titoli.
- la più agevole stima di parametri di rischio e di correlazione condotta con riferimento a o tra classi omogenee di strumenti finanziari piuttosto che con riferimento a singoli titoli o tra singoli titoli.
- La maggiore adattabilità del processo alle logiche gerarchiche tipiche di istituzioni che fanno dell’investimento in portagli mobiliari il proprio *core business.*

Si procede ora ad analizzare più nello specifico in cosa consiste l'approccio *top-down*. Secondo questa metodologia, un processo di investimento disciplinato prevede la propria articolazione in alcuni step sequenziali, si tratta di:

- *Asset allocation strategica.*
- *Asset allocation tattica* (o *market timing*).
- Attività di *stock picking.*

L'asset allocation strategica è l'attività secondo la quale si individua quella che sarà la composizione (espressa in termini di *asset class*) del portafoglio mobiliare. L'aggettivo "strategica" fa riferimento al fatto che il portafoglio in questione è strutturato in maniera tale da essere adeguato in una logica temporale di medio-lungo periodo (3-5 anni secondo gli operatori professionali, al contrario di quello che affermava la letteratura finanziaria anni '80, che identificava orizzonti temporali ben più estesi, nell'ordine dei 20-30 anni). I *pesi target* definiti per mezzo di quest'attività definiscono quindi la composizione che il portafoglio tendenzialmente o in media manterrà durante l'intero orizzonte temporale d'investimento.

L'asset allocation tattica è un'attività successiva alla prima e continua, nel senso che opera, ad intervalli d'intervento spesso costanti e predefiniti, lungo tutto l'orizzonte temporale d'investimento. Questa attività si manifesta nella temporanea sovraesposizione/sottoesposizione alle *asset class* definite in sede di *asset allocation strategica*, nella logica di sfruttamento di eventuali opportunità di mercato, oppure al fine di ridurre il peso dell'esposizione a mercati che mostrano prospettive future incerte o recessive. L'aggettivo "tattica" in questo caso fa riferimento alla logica di breve termine sottesa dall'attività: non si vuole infatti sconvolgere la composizione del portafoglio definito in sede di *asset allocation strategica,* motivo per cui questi scostamenti permangono solamente fino al successivo ribilanciamento, focalizzato a ricostituire/riavvicinarsi alla composizione originaria.

L'attività di *stock picking*, anche nota come *security selection*, consiste nell'individuazione dei singoli strumenti finanziari da assegnare a ciascuna *asset class*. Questa attività è più o meno complessa a seconda che l'attore adotti una gestione attiva o indicizzata/passiva. In una logica di gestione indicizzata, l'attività di selezione è finalizzata a riprodurre la composizione del benchmark di riferimento, minimizzando l'errore di replica[1]. Nella gestione attiva, al contrario, il gestore si propone di creare degli scostamenti tra la composizione

[1] Nella realtà operativa, una perfetta *full replication* non è sempre attuabile in quanto la composizione dell'indice varia periodicamente a seconda di alcuni parametri di composizione (capitalizzazione dei titoli).

dell’asset class e la composizione del benchmark di riferimento poiché fiducioso riguardo alle proprie capacità di sovraperformarlo, attraverso selezioni guidate dalla propria esperienza professionale.

1.2. L’asset allocation strategica e le asset class

Occorre ora porre la nostra attenzione sull’attività di *asset allocation strategica*, in quanto, come già accennato, questa fase risulta di fondamentale importanza nella costruzione di portafogli ottimizzati secondo le strategie del *Most diversified portfolio* e del *Global minimum variance portfolio* indagate nel presente lavoro, cosi come in tutte le altre tecniche alternative fondate sull’approccio *top-down*. È infatti proprio questo lo step nel quale possono essere implementate diverse strategie di ottimizzazione di portafoglio, poiché queste si basano su diverse modalità di gestione degli input (quali stime di rischio e di rendimento atteso) al fine di ottenere i maggiori benefici possibili dalla diversificazione di portafoglio finalizzata alla massimizzazione del rapporto rendimento atteso – rischio.

L’attività di *asset allocation strategica* in un primo momento richiede dunque il rintracciamento delle macrocategorie che formeranno, con diverse intensità, il portafoglio mobiliare. L’insieme delle *asset class* individuerà il cosiddetto “universo investibile”. L’individuazione di queste macrocategorie è molto importante in ragione del fatto che le previsioni riguardanti i futuri sviluppi dei comparti di mercato (rappresentati dalle *asset class*) sono frutto di un precedente procedimento avente ad oggetto la previsione, in termini sicuramente più ampi, dei possibili sviluppi dello scenario economico generale, condotta soprattutto attraverso analisi di tipo macroeconomico. Risulta immediato immaginare come la creazione di una connessione diretta tra l’andamento del mercato nel suo complesso e quello di un singolo titolo possa essere molto imprecisa, oltre che di difficile realizzazione. Infatti l’andamento (in termini di rendimento) di uno specifico titolo è solamente in parte influenzato dalle dinamiche generali di mercato, in quanto su di esso esercitano una forte influenza tutti quei fattori specifici che sono tipici dello svolgimento di un’attività economica di tipo societario, da cui derivano i relativi titoli negoziati sui mercati telematici. Tuttavia, le *asset class* essendo per definizione formate da una pluralità di titoli più o meno omogenei selezionati secondo criteri oggettivi, riescono a ridurre l’influenza dei singoli fattori specifici dei titoli che le compongono nella determinazione del loro rendimento, riuscendo ad avere una correlazione maggiore tra le prospettive economiche di ampio respiro e le proprie dinamiche.

Le asset class si differenziano a seconda della loro attinenza al mercato obbligazionario, azionario o monetario. Le asset class devono in ogni caso rispettare tre requisiti:

- esaustività.
- omogeneità interna.
- eterogeneità esterna.

L'esaustività richiede, in termini generali, la capacità da parte delle asset class selezionate di rappresentare in modo esaustivo, per l'appunto, l'universo investibile[2]. L'asset class deve quindi contenere, nel modo più fedele possibile, il maggior numero individuabile di titoli riconducibili alla classificazione in questione.

L'omogeneità interna è quel requisito secondo il quale nell'asset class deve rientrare l'insieme di strumenti finanziari esposti nel modo più simile possibile al rischio sistematico del comparto di riferimento. In altri termini, questi titoli devono essere in grado di presentare un certo grado di similarità gli uni con gli altri.

Il terzo ed ultimo requisito richiede che le diverse asset class siano esposte in maniera differente ai fattori di rischio sistematico derivanti dal contesto macroeconomico di riferimento.

Il secondo step di cui si compone l'attività di *asset allocation strategica* consiste nell'individuazione di un benchmark rappresentativo delle asset class selezionate nel primo step del procedimento, al fine di estrarre da esso gli input necessari ad avanzare un processo di ottimizzazione del portafoglio[3]. Il *benchmark* è un indice rappresentativo di un paniere virtuale di titoli che godono di un certo grado di similarità reciproca. Tuttavia, sebbene il benchmark risulti composto da titoli (*holdings/constituents* del benchmark*)* effettivamente negoziati sui mercati, la selezione dei suddetti titoli per la composizione del benchmark è effettuata meramente secondo criteri di composizione oggettivi e ben verificabili (ad esempio, l'area geografica di riferimento, le scadenze di una serie di titoli obbligazionari etc.) e non avviene seguendo delle logiche di valutazione finanziaria.

L'attività di *asset allocation strategica* si rivolge al benchmark per consentire la definizione del proprio assetto, dopodiché l'attività di gestione attinge nuovamente al benchmark in due

[2] "Asset management e investitori istituzionali", Basile, Braga, Ferrari, capitolo 3 pag. 78

[3] In sede di definizione del benchmark, effettuata dagli "Index Providers", vanno esplicitati i criteri in base ai quali vengono inclusi i titoli, le modalità con cui questi titoli concorrono a determinare il rendimento del benchmark stesso, il trattamento dei flussi finanziari corrisposti dai titoli che vi fanno parte (cedole, dividendi…) e la valuta di definizione dell'indice stesso, in funzione degli strumenti che vi fanno parte. Per approfondimenti si rinvia a Basile (2002).

maniere differenti: essa può avanzare la pretesa di replicare nel modo più fedele possibile il benchmark (è il caso della gestione indicizzata), oppure può utilizzarlo come parametro di riferimento sulla base del quale effettuare valutazioni in termini comparativi della strategia di investimento (è il caso della gestione attiva). Esiste un terzo tipo di relazione tra asset class e benchmark, rappresentata dalla "strategia *core-satellite"* della quale tuttavia non verranno esplorati i particolari nel presente lavoro[4].

Occorre ora indagare quali siano gli input necessari alla costruzione di un portafoglio seguendo l'approccio dell'*asset allocation strategica*, trattando di come sia possibile pervenire al rintracciamento e alla costruzione di questi indicatori, nonché spiegando con precisione la loro logica e il loro contributo all'attività *core* della costruzione dei portafogli.

1.3. Gli input necessari alla costruzione di un portafoglio finanziario.

La selezione di asset class, affiancate dai relativi benchmark, avviene con riguardo ad alcuni indicatori rappresentativi del comportamento delle asset class stesse. Questi indicatori vengono costruiti nell'ottica di avanzare stime riguardo al possibile comportamento futuro dei componenti del portafoglio, tuttavia essi vengono a formarsi utilizzando misure rappresentative del "passato" dello strumento, poiché nella loro costruzione vengono utilizzate serie storiche di dati (rendimenti), estraibili da appositi portali telematici. In questo frangente, si parla di "analisi di redditività" e "analisi di rischiosità". Considerando che un portafoglio "nasce" come selezione di asset class, a cui vengono attribuiti dei valori percentuali di inclusione (pesi), si procede a spiegare in termini analitici e matriciali quale ruolo i parametri rappresentativi del comportamento di queste asset class svolgano nelle analisi sopracitate con riguardo ai portafoglio finanziari.

<u>Analisi di redditività:</u>

Vi sono diversi *tools* che indagano la redditività di uno strumento finanziario o, per quel che qui interessa, di un'asset class poiché diverse sono le questioni per le quali si può tentare di fornire una risposta. In questa sede ci occuperemo del "rendimento medio aritmetico", del "rendimento medio geometrico" e della "performance cumulata". Mentre il primo indice rappresenta un input necessario alla costruzione di portafogli per la maggior parte delle strategie

[4] Si rimanda a "Asset management e investitori istituzionali", Basile, Braga, Ferrari, capitolo 3

esistenti[5], il secondo e il terzo verranno utilizzati per un'analisi *ex post* dei risultati, pertanto è opportuno citarle al fine di comprendere le loro logiche e formulazioni.

Il *rendimento medio aritmetico* altro non è che la media aritmetica dei rendimenti che un determinato strumento finanziario ha sperimentato in determinato periodo temporale preso in esame.[6] Questo parametro esprime dunque la tendenza centrale dei dati considerati.

$$\bar{R} = \frac{(R_1 + R_2 \ldots + R_{T-1} + R_T)}{T} \quad ; \quad \bar{R} = \frac{\sum_{t=1}^{T} Rt}{T}$$

Dove R_t sono i rendimenti periodici e T è il numero totale dei rendimenti periodici presi in esame.

Il rendimento medio aritmetico disconosce la logica composta (espressa dal rendimento medio geometrico di seguito esposto), tuttavia a questo parametro va riconosciuto il merito di trattare i rendimenti passati come equiprobabili e indipendenti gli uni dagli altri, e risulta dunque molto utile per effettuare stime riguardo a performance attese, in quanto riesce a trattare e considerare i rendimenti passati come possibili manifestazioni di rendimenti futuri (e questa risulta la motivazione principale che ne giustifica il largo impiego in sede di costruzione dei portafogli).

Il *rendimento medio geometrico* esprime il tasso di crescita costante che ha caratterizzato un determinato capitale inizialmente investito lungo un certo periodo temporale, esso considera la capitalizzazione composta dei rendimenti rispetto al capitale (effetto *compounding*).

$$R^{(G)} = \left(\frac{Montante\ finale}{Capitale\ iniziale}\right)^{1/T} - 1$$

La *performance cumulata* esprime il tasso di crescita complessivo (positivo o negativo) che ha caratterizzato un determinato capitale investito lungo un certo orizzonte temporale.

[5] Esistono metodi di ottimizzazione che prescindono dall'utilizzo di tale parametro nella loro implementazione. Queste strategie, che rappresentano il focus dell'elaborato, vengono comunemente identificate come *μ-free strategies*.

[6] Per la costruzione di questo indicatore vengono utilizzati dati a frequenza temporale ridotta, come rendimenti settimanali e mensili, seppur esso venga nella realtà dei fatti esposto in forma annualizzata.

$$Perf.cum_{t0,tfin} = \frac{Montante\ finale}{Capitale\ iniziale} - 1$$

Questo parametro tornerà utile nel valutare le diverse strategie di investimento che questo elaborato si pone di confrontare. Quest'ultimi due parametri, come già accennato, vengono utilizzati nella rendicontazione ex-post dei risultati relativi ad un qualsiasi investimento, per questo motivo verranno utilizzati nella parte finale dell'elaborato per comparare le strategie d'investimento oggetto di confronto.

Esposti i principali parametri di valutazione della performance, si va ora a definire la formula di calcolo, in termini analitici e matriciali, del *rendimento di un portafoglio composto da N asset class*:

In termini analitici:

$$\bar{R}_{PORT} = \sum_{i=1}^{N} (\bar{R}_i \times w_i)$$

Dove $\bar{R}_i$ è il rendimento aritmetico medio della i-esima asset class; w_i è il peso attribuito alla i-esima asset class; N è il numero di asset class di cui il portafoglio è composto. Il calcolo del rendimento di un portafoglio non è altro che la media ponderata dei rendimenti aritmetici medi delle asset class che lo compongono.

In termini matriciali:

$$\bar{R}_{PORT} = [w_1 \cdots\ w_i \cdots w_N] \times \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \vdots \\ \bar{R}_i \\ \vdots \\ \bar{R}_N \end{bmatrix}$$

Dove $[w_1 \cdots\ w_i \cdots w_N]$ è il vettore riga dei pesi delle singole asset class di dimensioni $(1 \times N)$; $\begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \vdots \\ \bar{R}_i \\ \vdots \\ \bar{R}_N \end{bmatrix}$ è il vettore colonna dei rendimenti delle singole asset class di dimensioni $(N \times 1)$; e $\bar{R}_{PORT}$ è uno scalare che individua il rendimento del portafoglio.

Analisi di rischiosità:

Il rendimento medio geometrico e il rendimento medio aritmetico, nell'ambito di un investimento rischioso, non convergono: il primo è sempre inferiore al secondo, e questo differenziale tra i parametri dipende proprio dall'aspetto di rischiosità dell'investimento. Tra le misure di rischio simmetriche, il parametro più utilizzato nell'ambito della costruzione dei portafogli è la deviazione standard.

La *deviazione standard/sigma/scarto quadratico medio* è una misura di dispersione dei dati attorno al proprio valore centrale ($\bar{R}$). Questo parametro viene calcolato estraendo la radice quadrata delle *volatilità/varianza* dei rendimenti.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}(R_t - \bar{R})^2}{T-1}} \quad \text{con} \quad \sigma \geq 0$$

Dove σ rappresenta la deviazione standard, $\bar{R}$ è il rendimento medio aritmetico, e R_t sono i rendimenti periodici dello strumento finanziario in esame. Si fa notare che la misura, essendo campionaria, richiede l'adeguamento relativo alla perdita di un grado di libertà (T – 1).

Per fornire una spiegazione intuitiva del parametro, si consideri il seguente esempio: $\sigma = 9{,}31\%$ equivale a dire, in termini prosaici, che lo strumento/mercato analizzato, nella maggior parte dei casi, ha sperimentato dei rendimenti periodici che hanno mostrato la tendenza ad allontanarsi dalla propria media ($\bar{R}$) di 9,31 punti percentuali.

Come attuato in precedenza per l'analisi di redditività, definiamo qui di seguito le modalità per calcolare, sempre in termini analitici e matriciali, il *rischio di un portafoglio composto da N asset class*.

Occorre precisare che il calcolo del rischio di un portafoglio è meno intuitivo del calcolo del rendimento dello stesso, poiché questo necessita della stima di un ulteriore parametro: la correlazione tra asset class. Questa affermazione deriva dall'assunzione secondo la quale il vero rischio di un portafoglio risulti minore (esclusi due particolari casi)[7] della media ponderata dei rischi delle asset class che lo compongono, per effetto della presenza di un "legame" tra diverse

[7] Il primo caso riguarda i portafogli costituiti da una sola asset class; il secondo caso è la situazione limite nella quale un portafoglio costituito da N asset class presenti, per ogni possibile coppia di asset class, esclusivamente valori di correlazione pari a +1.

asset class/mercati. I parametri statistici che consentono di spiegare il legame tra due asset class sono *covarianza* e *correlazione.*

Date due generiche asset class A e B, si definisce covarianza tra A e B:

$$COV_{A,B} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_t^A - \bar{R}^A)x(R_t^B - \bar{R}^B)}{T-1}$$

Se $COV_{A,B} > 0$ siamo in presenza di un "legame diretto" tra A e B, poiché questo risultato è espressivo di una tendenza da parte delle due asset class di aver sovraperformato o sottoperformato la propria media simultaneamente (nello stesso periodo t). Nel caso in cui $COV_{A,B} < 0$ siamo in presenza del cosiddetto "legame inverso" tra A e B, in quanto nel periodo preso in esame le asset class hanno dimostrato la tendenza a muoversi in direzioni opposte: quando la prima sovraperformava la propria media la seconda la sottoperformava e viceversa.

Tuttavia, essendo la covarianza un parametro sprovvisto di un range predefinito di valori ammissibili, nella realtà operativa è frequente l'uso di una sua standardizzazione: la correlazione.

Date due generiche asset class A e B, si definisce correlazione tra A e B:

$$\rho_{A,B} = CORR_{A,B} = \frac{\frac{\sum_{t=1}^{T}(R_t^A - \bar{R}^A)x(R_t^B - \bar{R}^B)}{T-1}}{\sigma_A \text{ x } \sigma_B} \quad \text{dove} \quad -1 \leq \rho_{A,B} \leq +1$$

O alternativamente:

$$\rho_{A,B} = CORR_{A,B} = \frac{COV_{A,B}}{\sigma_A \; x \; \sigma_B}$$

(0 < CORR < 1) è espressione di un legame diretto tra A e B; (-1 < CORR < 0) è espressione di un legame inverso tra A e B. Un termine di correlazione pari a +1 è espressione della forma più acuta di legame diretto tra le asset class, al contrario un termine di correlazione pari a -1 è espressione della forma più acuta di legame inverso tra le stesse asset class. Il caso limite in cui

il termine di correlazione è pari a 0 è rappresentativo di una situazione in cui non si può affermare se prevalga un legame diretto o inverso.

I portafogli finanziari prediligono nella loro composizione la presenza di asset class con bassi valori di correlazione reciproci (quanto più prossimi al limite inferiore del dominio), in quanto tanto è inferiore il suddetto valore tanto più il vero rischio di portafoglio risulterà inferiore alla media ponderata dei rischi. Per questo motivo i portafogli risultano essere potenti strumenti nelle logiche di gestione del rischio, in quanto essi giovano della diversità dei propri componenti e la sfruttano per ottenere ridotti livelli di rischio per determinati livelli di rendimento atteso.

A questo punto è possibile indicare la formula con la quale si perviene al calcolo del rischio "vero" di un portafoglio composto da N asset class, nelle sue due forme alternative ed equivalenti.

In termini analitici:

$$\sigma_{PORT} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\sigma_i w_i)^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(w_i w_j cov_{i,j} \right)}$$

O alternativamente:

$$\sigma_{PORT} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\sigma_i w_i)^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j} \right)}$$

In termini matriciali:

$$\sigma_{PORT} = \sqrt{\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_i & \cdots & w_N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} COV_{1,1} & COV_{1,2} & \cdots & COV_{1,i} & \cdots & COV_{1,N} \\ COV_{2,1} & COV_{2,2} & \cdots & COV_{2,i} & \cdots & COV_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ COV_{i,1} & COV_{1,2} & \cdots & COV_{i,i} & \cdots & COV_{i,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ COV_{N,1} & COV_{N,2} & \cdots & COV_{N,i} & \cdots & COV_{N,N} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}}$$

O alternativamente:

$$\sigma_{PORT} = \sqrt{[\sigma_1 w_1 \quad \sigma_2 w_2 \quad \cdots \quad \sigma_i w_i \quad \cdots \quad \sigma_N w_N] \times \begin{bmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,i} & \cdots & \rho_{1,N} \\ \rho_{2,1} & \rho_{2,2} & \cdots & \rho_{2,i} & \cdots & \rho_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{i,1} & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{i,i} & \cdots & \rho_{i,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{N,1} & \rho_{N,2} & \cdots & \rho_{N,i} & \cdots & \rho_{N,N} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_1 w_1 \\ \sigma_2 w_2 \\ \vdots \\ \sigma_i w_i \\ \vdots \\ \sigma_N w_N \end{bmatrix}}$$

Il numero di termini di correlazione non ridondanti determinati in questo modo è: $\frac{N\times(N-1)}{2}$

Questa affermazione è spiegata dal fatto che la matrice di covarianza è quadrata e perfettamente simmetrica rispetto alla diagonale principale, in quanto $COV_{i,j} = COV_{j,i}$ e $COV_{i,i}= \sigma_i^2$.

Anche la matrice di correlazione è quadrata e perfettamente simmetrica rispetto alla diagonale principale, in quanto $\rho_{i,j}=\rho_{j,i}$ e $\rho_{i,i} = +1$.

La capacità di un portafoglio di "far risparmiare" rischio è calcolabile in intensità e il numero percentuale che deriva dal calcolo è definito "beneficio della diversificazione" ed è pari a:

$$Beneficio\ della\ diversificazione = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\sigma_i \times w_i) - \sigma_{PORT}}{\sum_{i=1}^{N}(\sigma_i \times w_i)} = \frac{\begin{matrix} media\ ponderata \\ dei\ rischi \end{matrix} - rischio\ vero}{\begin{matrix} media\ ponderata \\ dei\ rischi \end{matrix}}$$

Dove σ_i rappresenta la deviazione standard della i-esima *asset class* e w_i il peso che la stessa assume nel portafoglio. Il beneficio della diversificazione viene calcolato in rapporto alla media ponderata dei rischi poiché questa rappresenta il più elevato livello di rischio che il portafoglio potrebbe presentare.[8]

[8] Questo valore si manifesterebbe come vero rischio di portafoglio nel caso in cui la correlazione tra tutte le coppie di asset class di cui il portafoglio è composto fosse pari a +1.

1.4 Asset allocation strategica secondo la "Mean-Variance Optimization"

Tra i contributi scientifici indirizzati a sviluppare un approccio disciplinato all'attività di asset allocation strategica assume particolare rilevanza l'articolo pubblicato da Harry Markowitz nel marzo 1952 sul *Jurnal of Finance* che prende il nome di "Portfolio Selection". Le nozioni esposte da Markowitz in quel contributo hanno fondato la cosiddetta *Modern Portfolio Theory*, più comunemente identificata con gli appellativi *Mean-Variance Analysis* e *Mean-Variance Optimization* (MVO).

Tre sono i principali meriti riconosciuti all'autore in seguito alla pubblicazione del paper: l'elaborazione di un *robust framework* quantitativo alla questione della *Portfolio Construction* (che sarà oggetto di approfondimento nei successivi paragrafi di questo elaborato), l'identificazione dell'investitore razionale che assume decisioni in un contesto bidimensionale *mean-variance*, e, ultimo ma non per importanza, l'esplicitazione in termini quantitativi e logici del concetto di *"Right Kind of diversification*".

Come già accennato, il concetto di diversificazione viene tradotto in termini algebrici dai parametri di covarianza e correlazione: questo metodo di calcolo fu proprio elaborato da Markowitz che per primo andò oltre l'analisi della rischiosità *stand alone* delle asset class costituenti un portafoglio mobiliare nell'ottica di percepire come e quanto l'interazione tra queste avesse effetti sulla riduzione del rischio reale del portafoglio stesso. Secondo Markowitz, infatti, la diversificazione non si risolve nel semplice aumento del numero dei constituents, ma riguarda per l'appunto un'analisi scientifica dei parametri che esprimono i legami tra questi: "Not only the E-V hypothesis imply diversification, it implies the 'right kind' of diversification for the 'right reason'. The adequacy of diversification is not thought by investors to depend solely on the number of different securities held […]".[9]

Markowitz inoltre respinge l'idea di investitore focalizzato solamente sulla massimizzazione dei risultati dell'investimento (in termini di performance cumulata o rendimento atteso), ma contestualizza il soggetto come razionale in un ambito, per l'appunto, bidimensionale: l'investitore razionale secondo l'autore tiene conto della massimizzazione del rendimento aggiustato per il rischio (ovvero del *trade-off* rischio-rendimento). In altre parole, l'investitore razionale è colui che vuole massimizzare i risultati del proprio investimento "scontando" il minor rischio possibile (espresso in termini assoluti come deviazione standard).

[9] Markowitz (1952), pag 89.

Markowitz formalizza la questione nel seguente modo: se si considerano due generici portafogli X e Y aventi rispettivamente rischio atteso σ_X e σ_Y e rendimento atteso μ_X e μ_Y, si dice che il portafoglio X domina/è strettamente preferibile al portafoglio Y nel caso in cui, per le seguenti disequazioni, almeno una disuguaglianza forte sia verificata:

$$\mu_X \geq \mu_Y \text{ e } \sigma_X \leq \sigma_Y$$

Il modello si basa inoltre sull'assunzione di mettere a disposizione l'algoritmo ad un investitore che si comporta in modo miope (*myopic behaviour)*: stiamo dunque considerando un investitore che si muove in un ambito uniperiodale (decide in quale portafoglio concretizzare l'investimento e lo detiene, senza possibilità di smobilitare o modificare lo stesso, fino al termine del periodo preso in considerazione) nell'ottica di massimizzazione della propria utilità attesa.

Provvediamo ora a definire i parametri descrittivi utilizzati nel processo di *Mean-Variance Optimization* espresso da Markowitz, per poi addentrarci nell'analisi approfondita del modello.

Il portafoglio da ottimizzare secondo l'autore può essere descritto come un vettore (**w**) di dimensioni $(N \times 1)$ composto dagli elementi w_i che esprimono le percentuali con le quali le i-esime asset class contribuiscono alla composizione del portafoglio stesso (i cosiddetti "pesi"), sotto il vincolo di *full investment constraint*:

$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$, o equivalentemente, $\boldsymbol{w'e} = 1$ con $\boldsymbol{e'} = [1,1,1, \dots 1]$

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}$$

I vettori colonna $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ di dimensioni $(N \times 1)$ descrivono rispettivamente i rendimenti attesi e i parametri di rischio relativi alle asset class contenute nel vettore $\boldsymbol{w}$**:**

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_i \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_i \\ \vdots \\ \sigma_N \end{bmatrix}$$

I parametri di correlazione e covarianza che spiegano i legami interattivi che intercorrono tra le N asset class incluse nel portafoglio sono espressi nelle matrici di correlazione e covarianza rispettivamente indicate con i simboli **COR** e **COV,** entrambe di dimensioni $(N \times N)$:

$$\mathbf{COR} = \begin{bmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,i} & \cdots & \rho_{1,N} \\ \rho_{2,1} & \rho_{2,2} & \cdots & \rho_{2,i} & \cdots & \rho_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{i,1} & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{i,i} & \cdots & \rho_{i,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{N,1} & \rho_{N,2} & \cdots & \rho_{N,i} & \cdots & \rho_{N,N} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{COV} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,i} & \cdots & \sigma_{1,N} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \cdots & \sigma_{2,i} & \cdots & \sigma_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{i,1} & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{i,i} & \cdots & \sigma_{i,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{N,1} & \sigma_{N,2} & \cdots & \sigma_{N,i} & \cdots & \sigma_{N,N} \end{bmatrix}$$

Si ripete per completezza che nella matrice **COR** i termini $\rho_{i,i}$ presenti sulla diagonale principale rappresentano la correlazione della i-esima asset class con se stessa e questo termine assume in tutti i casi un valore pari a +1. Allo stesso modo, nella matrice **COV** i termini $\sigma_{i,i}$, per ogni asset class considerata, sono equivalenti a σ_i^2, ossia alla varianza della i-esima asset class.

A questo punto possiamo denotare la formula di calcolo del rendimento atteso del portafoglio:

$$\boldsymbol{\mu}_{PORT} = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{\mu}$$

Sempre facendo riferimento alle espressioni presenti nella sezione precedente, il rischio di portafoglio può essere espresso in termini matriciali nel seguente modo:

$$\sigma_{PORT} = \sqrt{\boldsymbol{w}'\mathbf{COV}\boldsymbol{w}}$$

Definite queste grandezze matriciali, è ora possibile trascrivere l'algoritmo che, in termini pratici, consente di individuare per ogni *target value* di rischio la composizione ottima del *mean-variance efficient portfolio* secondo Markowitz. Questo algoritmo, comunemente identificato come *Mean-Variance Optimization Problem*, presenta le tre componenti tipiche di un qualsiasi algoritmo di ottimizzazione:

1. <u>Funzione obbiettivo:</u>
   Si tratta di una formula analitica/di calcolo che deve essere ottimizzata, cioè massimizzata o minimizzata. Nel modello di Markowitz questa combacia con la

formula di calcolo del rischio di portafoglio di cui si richiede la minimizzazione (restituzione del risultato più basso possibile).

$$MIN\sigma_{PORT}$$

2. Variabili decisionali:
   Queste assumono un duplice ruolo all'interno del processo: all'inizio del procedimento di ottimizzazione le variabili decisionali rappresentano le incognite, una volta che l'algoritmo viene implementato e risolto esse diventano l'output. Nel *Mean-Variance Optimization Problem* di Markowitz le variabili decisionali risultano essere le variabili contenute nel vettore $\boldsymbol{w}$, ossia i pesi da assegnare alle asset class affinché il rischio di portafoglio risulti minimizzato.

$$Variabile\ decisionale = w_i$$

3. Vincoli/Constraints:
   Sono condizioni che nel processo di ottimizzazione l'algoritmo dovrà rispettare, nel caso del modello di Markowitz queste condizioni influiscono sugli aspetti di rendimento *target* del portafoglio e sulle variabili decisionali w_i. I vincoli previsti dall'autore sono:

   - Vincolo Finanziario:
   Riguarda il rispetto di un certo target di rendimento arbitrariamente identificato dal soggetto che si avvale dell'algoritmo, per il quale quest'ultimo restituirà la serie di pesi che consentiranno di raggiungere il minor valore di rischio possibile (dato $\boldsymbol{\mu}_p$) con riferimento all'universo investibile preso in considerazione.

$$\boldsymbol{\mu}_{PORT} = \boldsymbol{\mu}_p$$

   - Vincoli Tecnici:
   1) "Budget constraint" o "full investment constraint":

Come già accennato in fase di definizione delle grandezze matriciali, è il vincolo tale per cui la somma dei pesi deve essere pari a 1 (100%). Nel caso in cui questo vincolo fosse rimosso l'algoritmo restituirebbe degli output non in linea con le possibilità di composizione di portafoglio nella realtà operativa.

$$w_1 + \cdots + w_i + \cdots + w_n = 1$$

2) "Long only constraint" o "non-short selling constraint":
Quest'ultimo vincolo di natura tecnica proibisce all'investitore di assumere posizioni corte (*short* selling), assumendo dunque che le variabili decisionali non possano assumere valori inferiori a 0.

$$w_i \geq 0$$

In un momento antecedente all'imposizione di questi vincoli era possibile, in linea teorica, risolvere il problema di ottimizzazione per via analitica, seppur la complessità data dal numero di termini di covarianza/correlazione. In ogni caso la presenza dei vincoli tecnici impone la risoluzione del problema per via iterativa[10]. Il *Mean-Variance Optimization* si configura in questo modo come un problema di Programmazione Quadratica, poiché si propone di minimizzare una funzione quadratica nel rispetto di vincoli lineari.[11]

L'algoritmo impostato in questo modo restituisce una serie di pesi per le date macrocategorie di investimento la cui somma identifica un *mean-variance efficient portfolio*, ovvero un portafoglio che per il valore di rendimento atteso desiderato riesce a minimizzare il rischio, espresso in termini di deviazione standard.

L'algoritmo cosi descritto può essere modificato "ribaltando" la funzione obbiettivo e il vincolo finanziario, prendendo in questo modo il nome di *expected return maximization formulation*; questa nuova formulazione richiede come primo step la scelta di un valore di rischio *target* (e non più di rendimento) per il quale si vuole ottenere una serie di pesi tali per cui il portafoglio presenti il maggior livello di rendimento possibile. La funzione obbiettivo diventa in questo modo:

---

[10] Il processo avviene attraverso la generazione di sequenza di output che consentono di convergere al risultato ottimizzato, tenuto conto di un determinato *convergence criterion.* "Asset management e investitori istituzionali", Basile, Braga, Ferrari, capitolo 4 pag. 94.
[11] "Asset management e investitori istituzionali", Basile, Braga, Ferrari, capitolo 4 pag. 94

$$MAX\boldsymbol{\mu}_{PORT}$$

Sotto i vincoli:

$$\sigma_{PORT} = \sigma_p$$

$$w_1 + \cdots + w_i + \cdots + w_n = 1$$

$$w_i \geq 0$$

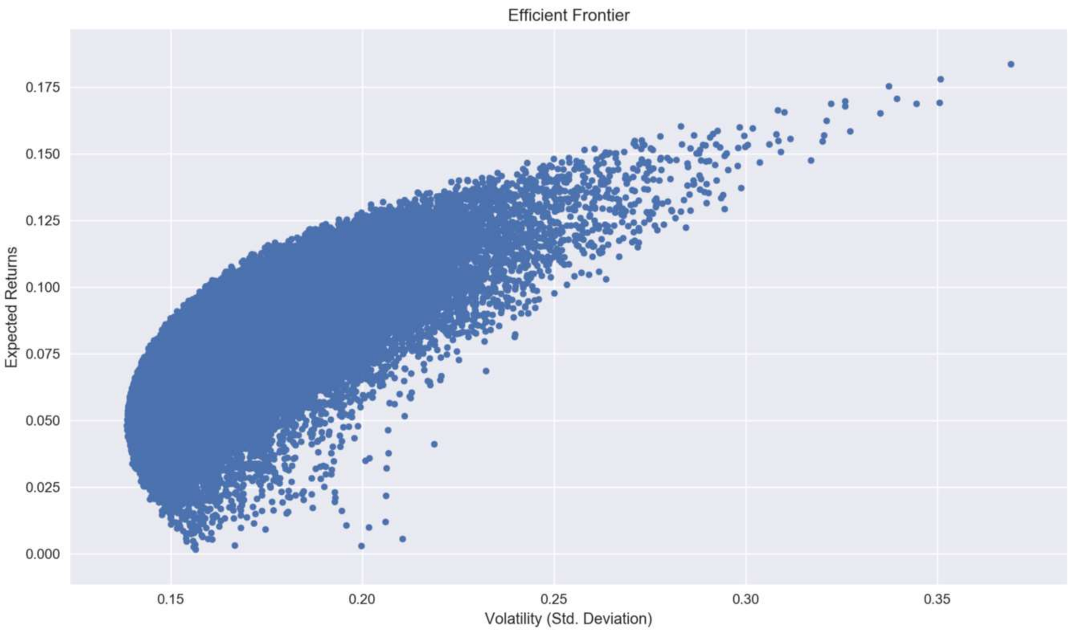
Si fa notare come le due impostazioni alternative, a parità di *convergence criterion*, non possano che restituire le stesse combinazioni ottime di rischio e rendimento. Infatti, nel caso in cui nel *Mean-Variance Optimization Problem* "tradizionale" si ponga (ad esempio) $\boldsymbol{\mu}_p = 10\%$ ottenendo come valore ottimizzato $\sigma_{PORT} = 20\%$, la *expected return maximization formulation* con target di rischio $\sigma_p = 20\%$ restituirà necessariamente un valore ottimo $\boldsymbol{\mu}_{PORT} = 10\%$.

Quelle sovraesposte non sono le uniche formulazioni possibili dell'algoritmo di ottimizzazione: un'altra celebre impostazione prende il nome di *risk aversion formulation* la quale vede come funzione obbiettivo una funzione di utilità dell'investitore da massimizzare come di consueto nel rispetto di alcuni vincoli tecnici/finanziari, che in questo caso ha come focus principale la considerazione di un coefficiente di avversione al rischio.[12]

Riproducendo l'algoritmo classico per diversi valori di $\boldsymbol{\mu}_p$, con $(0 \leq \boldsymbol{\mu}_p \leq x)$; $(x \in \mathrm{N})$; si ottiene un set di portafogli ottimi secondo Markowitz che costituiscono, in uno spazio rischio-rendimento, la cosiddetta "Frontiera efficiente" o *Feasible set*. Il *feasible set* restituisce il miglior possibile *trade-off* tra rischio e rendimento atteso per ciascun livello *target* di rendimento (o di rischio secondo la *expected return maximization formulation*).

[12] A riguardo si veda "Asset management e investitori istituzionali", Basile, Braga, Ferrari, capitolo 4 pag. 94

Figura 1.1: Efficient frontier by Markowitz



Fonte: https://medium.com/python-data/effient-frontier-in-python-34b0c3043314

Qualunque portafoglio al di sotto della frontiera efficiente non risulta un portafoglio *mean-variance efficient* e per tale motivo viene detto "dominato" o "inefficiente". I portafogli al di sopra della frontiera efficiente sono invece, per quanto sovraesposto, non fattibili nella realtà operativa.

Il portafoglio rappresentato dal punto "più a sinistra" del grafico, ossia il portafoglio ottimizzato con la minore deviazione standard possibile viene detto *global minimum variance portfolio* (GMVP) e rappresenta un oggetto centrale di studio nella prospettiva di confronto adottata da questo elaborato. Per tale motivo, nelle sezioni successive l'analisi analitica della sua composizione e definizione occuperà uno spazio non indifferente.

1.5 Ipotesi base della MVO.

Il modello della *Mean-Variance Optimization* si fonda su alcune ipotesi semplificatrici riguardanti il comportamento delle serie storiche di rendimento delle asset class che formano l'universo investibile e la logica decisionale dell'investitore razionale:

- I rendimenti delle asset class presenti nelle serie storiche seguono una distribuzione normale multivariata (distribuzione gaussiana);

- gli investitori (come già accennato) agiscono in un orizzonte temporale uniperiodale;
- gli investitori sono caratterizzati da una funzione di utilità quadratica.

Queste ipotesi semplificatrici, seppur necessarie nella costruzione del modello, risultano essere molto "forti", vale a dire che queste possono con ogni probabilità distaccarsi dalla realtà dei fatti, infatti:

- la distribuzione gaussiana dei rendimenti delle asset class non è altro che un'approssimazione della reale funzione di distribuzione degli stessi parametri;
- gli investitori spesso hanno la possibilità di interagire con il proprio investimento durante il periodo attraverso prelievi e versamenti di capitale.
- la funzione di utilità quadratica potrebbe non aderire con i reali principi decisionali di un generico investitore rilevanti in sede di investimento.

Anticipando che la rimozione di queste ipotesi semplificatrici, nei tentativi elaborati e proposti da diversi studiosi, ha sempre portato alla difficoltà di implementare nel concreto i modelli di ottimizzazione cosi generati (soprattutto considerando un portafoglio costituito da un numero di asset class successivamente elevato da renderlo verosimile), risulta utile esplorare più nel dettaglio queste ipotesi considerando la natura dei rigetti proposti dai membri della comunità scientifica nei decenni successi alla formulazione della MVO.

Con riguardo alla prima ipotesi, l'assunzione di normalità vanta il merito di consentire uno studio del comportamento dei rendimenti delle macrocategorie di investimento semplicemente attraverso il primo e il secondo momento statistico (rispettivamente rendimento atteso e varianza). Tuttavia, diversi studiosi hanno avanzato l'accoglimento dei due successivi momenti statistici (il terzo, ovvero la *Skewness* e il quarto, la *Kurtosis*) come parametri utili alla costruzione di più completi modelli di ottimizzazione. I contributi di Kon (1984), Jondeau e Rockinger (2006), Singleton e Wingender (1986), Simkowitz e Beedles (1980), Peirò (1999) e Prakash *et al* (2003) hanno introdotto la rilevanza nelle stime di distribuzione del terzo momento statistico. La versione standardizzata della *skewness* è la seguente:

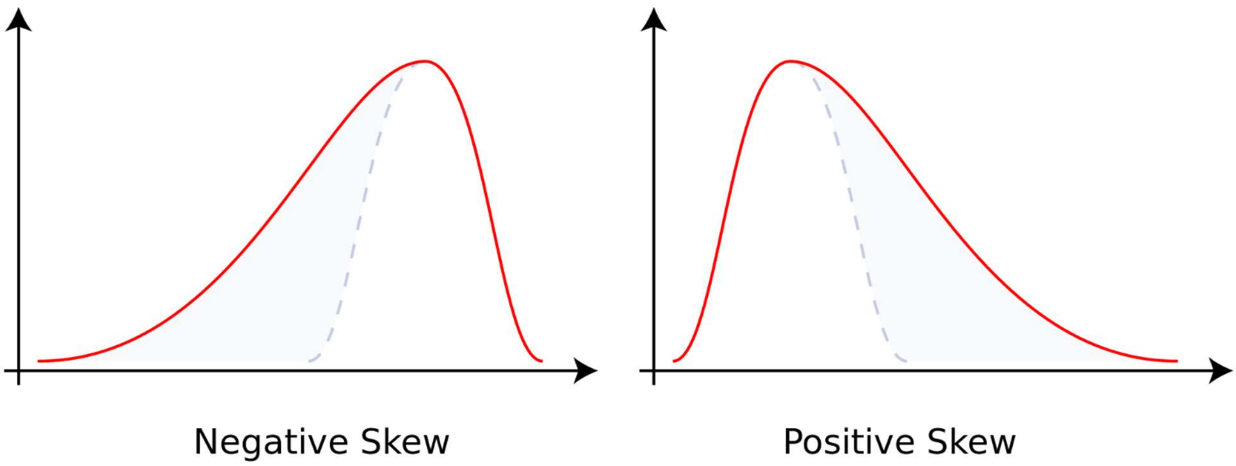
$$S = E\left[\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^3\right]$$

La stima campionaria del parametro risulta invece cosi definita:

$$\hat{S} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{x_t - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)^3$$

Il parametro in questione è una misura di asimmetria dei rendimenti nella distribuzione gaussiana e in particolare nega l'identità tra media e mediana e l'equa dispersione delle masse di probabilità a destra e a sinistra del valore atteso.In particolare una *skewness* > 0 è rappresentativa di una contrazione della coda di sinistra e, al contrario, una *skewness* < 0 indica una contrazione della coda di destra.

Figura 1.2: *Skewness*



Fonte: https://sites.google.com/site/financeiitm/Discussions/skewness

Gli studi relativi al quarto momento statistico sono invece stati proposti da Longin (1996), Fama (1963) e Jansen e Devries (1991) che hanno invece accolto l'ipotesi (misurata dal parametro della *Kurtosis*) secondo la quale la massa di probabilità nei quantili più estremi della distribuzione fosse in realtà più elevata di quella normalmente descritta dalla distribuzione gaussiana. Ciò si traduce in una presenza maggiore di valori *outlier* nel complesso delle osservazioni, che porta alla cosiddetta caratteristica *fat tailed*. Il parametro di *Kurtosis* presenta la seguente formulazione:

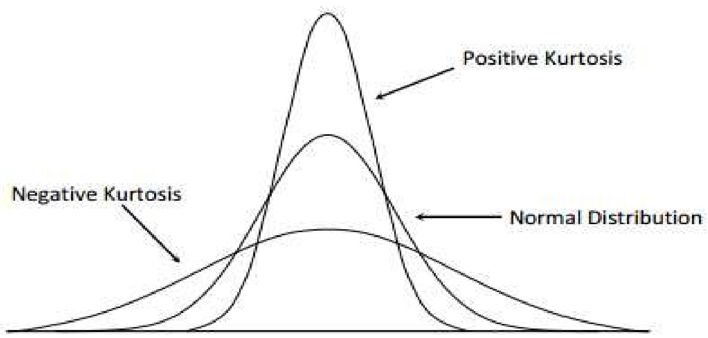
$$K = E\left[\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^4\right]$$

La stima campionaria del parametro risulta invece cosi definita:

$$\widehat{\mathrm{K}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{x_t - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)^4$$

In una distribuzione gaussiana la *kurtosis* assume un valore pari a 3. Per K > 3 la distribuzione è considerata *fat tailed*, per K < 3 la distribuzione risulta "più schiacciata" dell'originaria distribuzione normale multivariata. In logica descrittiva solitamente viene utilizzato il parametro dell'*excess Kurtosis*, ovvero il valore di K decurtato da 3. La figura x mostra come si presentano le funzioni di densità per i vari valori di *excess kurtosis*.

Figura 1.3: *Kurtosis*



Fonte: https://stats.stackexchange.com/questions/84158/how-is-the-kurtosis-of-a-distribution-related-to-the-geometry-of-the-density-fun

La seconda ipotesi stringente adottata dal modello riguarda la natura uniperiodale dello stesso. In questa tipologia di struttura, l'investitore sceglie all'inizio del periodo il proprio portafoglio ottimo (tra quelli presenti sulla frontiera efficiente) e non attua alcuna scelta di ribilanciamento o modificazione della composizione di esso fino al termine del periodo. La logica sottostante è quella di un investitore che ha come obbiettivo la massimizzazione della propria utilità al termine del periodo di riferimento, quando si concretizza il rendimento finale e "incassa" i frutti della sua scelta d'investimento. Nella realtà operativa una situazione di questo genere si realizza di rado poiché esistono attività che incidono sulla composizione del portafoglio nel corso del periodo d'investimento (si pensi all'asset allocation tattica o più in generale all'attività di *rebalancing*), per questo motivo si considera auspicabile un *multiperiod asset allocation model*.

Anche in questo modello, come nel precedente, l'obbiettivo dell'investitore è massimizzare la propria utilità (intesa come benessere) al termine del proprio orizzonte temporale di investimento. Tuttavia in questo caso l'investitore agisce come se potesse suddividere il periodo totale in "sottoperiodi", al termine di ciascuno dei quali egli ha la possibilità modificare la composizione del portafoglio (certamente senza stravolgerla) in funzione delle dinamiche sopraggiunte nel corso del sottoperiodo stesso. È evidente che in questo modo possa venir meno il concetto di ottimizzazione singola realizzato in sede di asset allocation strategica secondo l'approccio classico.

L'ultima ipotesi base su cui il modello *Mean-Variance Optimization* si regge sull'assunzione che il grado di soddisfazione dell'investitore in base alla propria scelta di portafoglio possa essere misurato attraverso una funzione di utilità quadratica del tipo:

$$U(W) = W - \frac{b}{2}W^2 \quad \text{con} \quad b > 0$$

W rappresenta la ricchezza dell'investitore al termine dell'orizzonte temporale di riferimento. La funzione di utilità assume la forma quadratica in quanto, anche in questo caso, viene data rilevanza solamente ai primi due momenti statistici (media e varianza) in tema di determinazione del benessere atteso dell'investitore. Per dimostrare quanto appena detto è sufficiente riformulare la funzione di utilità tramite uno sviluppo in serie di Taylor nel seguente modo:

$$U(W) = U(1 + \boldsymbol{w}'\boldsymbol{R}) = U(1 + R_{PORT})$$

Dove $\boldsymbol{w}$ indica il vettore dei pesi delle asset class contenute nel portafoglio, $\boldsymbol{R}$ indica il vettore dei rendimenti delle stesse asset class e il loro prodotto matriciale (dopo aver proceduto a trasporre il vettore dei pesi: $\boldsymbol{w}'$) R_{PORT} identifica il rendimento del portafoglio. Il valore atteso della ricchezza finale (al termine del periodo) è quindi dato dalla seguente espressione:

$$E[W] = 1 + \boldsymbol{w}'\boldsymbol{\mu} = 1 + \mu_{PORT}$$

Il valore atteso della funzione di utilità dell'investitore può essere calcolato, in base alla serie di Taylor, attraverso una sommatoria con k che tende ad infinito del prodotto tra k derivate della funzione di utilità e dei rispettivi momenti centrali di distribuzione del benessere finale:

$$E[U(W)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U^k E[W]}{k!} \times E[(W - E[W])^k]$$

Qualora le sole prime due derivate siano diverse da zero, l'utilità attesa dipende esclusivamente dalla media e dalla varianza e vale la seguente uguaglianza:

$$E[U(W)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U^k E[W]}{k!} \times E[(W - E[W])^k] = W - \frac{b}{2} W^2$$
$$= U(E[W]) + \frac{1}{2!} U^{(2)} \times E[W] \sigma_{PORT}^2$$

Alcuni studiosi hanno criticato l'eccessiva semplificazione derivante dal porre l'attenzione esclusivamente ai primi due momenti statistici di W nell'ambito di definire la composizione del portafoglio ottimo secondo Markowitz. In particolare Sarnat (1974) accusava la funzione di utilità quadratica di non essere in grado di rappresentare in modo verosimile la logica comportamentale di un investitore "reale", in quanto essa:

- Non aderisce al "principio di non sazietà";
- Considera l'avversione al rischio da parte dell'investitore come crescente.

Il principio di non sazietà è il principio secondo il quale, in termini generali, considerando due panieri contenenti due generici beni A e B: un paniere contenente una quantità maggiore di uno dei due beni (A), a parità dell'altro (B), è sempre preferito ad un paniere che ne contiene una quantità inferiore (A). Questo principio viene tradotto nel contesto in questione assumendo che una maggiore utilità sia sempre preferibile rispetto ad una minore utilità. Ciò equivale a dire che la funzione di utilità quadratica rispetta il principio solamente nei casi in cui $\frac{1}{b} > W$; infatti per qualunque valore di $W > \frac{1}{b}$ la derivata di primo ordine della funzione risulta negativa e dunque l'utilità decrescente rispetto alla ricchezza finale.

La seconda violazione riguarda l'assioma secondo il quale un generico investitore presenti un'avversione al rischio tale per cui la ricchezza disponibile sia direttamente collegata all'ammontare delle attività rischiose detenute nel portafoglio. In termini semplificati, all'aumentare della ricchezza disponibile dovrebbero aumentare, in maniera più o meno proporzionale, anche le percentuali di attività rischiose detenute in portafoglio. La funzione di utilità quadratica viaggia esattamente nella direzione opposta, infatti secondo essa all'aumentare della ricchezza si assisterebbe ad una contrazione della quota di attività rischiose detenute, seguendo una logica di avversione decrescente al rischio.[13]

Ulteriori contributi scientifici[14] hanno negato fortemente l'irrilevanza degli *higher order moment* in tema decisionale, dimostrando una buona disponibilità da parte dell'investitore ad accogliere deviazioni positive di *skewness* e deviazioni negative di *kurtosis*, anche dovendo sacrificare in cambio parte del rendimento atteso. Tuttavia, come affermato da Braga in "Asset management e investitori istituzionali", Basile, Braga, Ferrari, capitolo 4: "La conduzione dell'attività di *optimal asset allocation under higher moment* espone, in via alternativa o concomitante, a diverse complicazioni […]"[15], indicando di seguito una serie di problematiche derivanti dall'applicazione del detto metodo riguardanti principalmente un aumento della portata del problema di ottimizzazione (in quanto esso richiede la stima, oltre che dei tradizionali parametri necessari all'implementazione dell'algoritmo, delle misure di *skewness* e *kurtosis* e delle relative matrici), la gestione e il "targettamento" congiunto di più obbiettivi in simultanea (massimizzazione di rendimento atteso e *skewness*, minimizzazione di deviazione standard e *kurtosis*).

Per questi motivi, l'utilizzo della restrizione risulta di notevole diffusività pratica anche poiché è stato dimostrato come l'utilizzo dei primi due momenti statistici della distribuzione riesca ad approssimare in maniera abbastanza precisa la funzione di utilità dell'investitore tradizionale.

1.6 Problematiche relative alla MVO: *estimation risk*.

Una volta note le ipotesi del modello, è ora opportuno indagare quali problematiche posso sorgere sotto il punto di vista pratico in sede di implementazione di quest'ultimo. Ci riferiamo in particolare al cosiddetto *estimation risk*. L'algoritmo di Markowitz per essere utilizzato al

[13] Per un'analisi più approfondita del concetto di avversione al rischio si legga Prat (1964)
[14] Scott e Horwath (1980), Kraus e Litzenberg (1976), Harvey e Siddique (2000), Mitton e Vorkink (2007).
[15] "Asset management e investitori istituzionali", Basile, Braga, Ferrari, capitolo 4 pag. 99

fine di individuare i pesi ottimi da assegnare ad ogni asset class dell'universo investibile richiede, come già esposto, la stima del vettore dei rendimenti attesi per ogni i-esima asset class (rendimenti aritmetici medi delle asset class) e della matrice di varianza-covarianza campionaria tra ogni coppia di generiche asset class i e j. Di seguito si riportano le rispettive formule di calcolo:

$$COV_{i,j} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_t^i - \bar{R}^i)x(R_t^j - \bar{R}^j)}{T-1}$$

$$\bar{R}_i = \frac{\sum_{t=1}^{T} Rt}{T}$$

È chiaro che la stima di questi parametri avvenga attingendo a serie storiche di rendimenti passati per ogni asset class che, come ipotizzato dall'autore, vengono considerati come variabili casuali R_i(con $i = 1, \dots, N$) che seguono una distribuzione normale multivariata. L'algoritmo dunque nel processo di ottimizzazione considera questi parametri campionari al pari dei parametri reali, supponendo la capacità da parte di questi di riprodurre fedelmente il comportamento passato delle asset class e quindi, di essere parametri perfettamente attendibili per rappresentare il comportamento futuro delle stesse. Ovviamente essendo le stime campionarie parametri costruiti basandosi su una distribuzione di probabilità non realmente nota queste sono soggette ad un certo grado di incertezza, e da qui nasce il problema dell'*estimation risk* che viene definito come la probabilità di compiere un *estimation error* (ε_{error}), definito nel seguente modo:

$$\varepsilon_{error} = \hat{\theta} - \theta$$

Dove $\hat{\theta}$ rappresenta il valore stimato di un generico parametro e θ indica il vero valore di quel parametro.

La risoluzione dell'algoritmo di ottimizzazione trascurando la possibile (e altamente probabile) presenza di *estimation errors* conduce ad una serie di effetti problematici. In primo luogo i portafogli ottimi a la Markowitz sono noti per essere "financially meaningless optimal portfolios"[16], nel senso che questi portafogli tendono ad essere molto concentrati su un basso numero di asset class (che mostrano parametri attraenti, come basse volatilità, elevate medie di

[16] Michaud (1989), pag 33.

rendimento e contenuti valori di correlazione con le altre macrocategorie) e tendono inoltre a variare pesantemente la propria composizione spostandosi lungo la frontiera efficiente su valori di rischio/rendimento diversi. Questa concentrazione verso poche asset class, piuttosto che optare per una maggiore diversificazione del portafoglio stesso, hanno reso gli operatori poco propensi ad utilizzare l'approccio a la Markowitz nei primi decenni di vita di quest'ultimo, nonostante il suo rigore logico e la sua facile applicabilità. Bisogna anche considerare che le asset class che più soffrono di errori di stima tali per cui esse siano "sopravvalutate" finiscono spesso per avere pesi non poco rilevanti nella composizione del portafoglio. A riguardo sono particolarmente esplicative le parole di Michaud: "The inintuitive character of many optimized portfolios can be traced to the fact that MV optimizers are, in fundamental sense, estimation errors maximizers".[17]

Per capire la portata e le problematiche derivanti dall'*estimation risk* bisogna considerare la natura instabile dei portagli *mean-variance efficient*: piccole variazioni nei valori degli input (e quindi in particolare dei valori contenuti nelle serie storiche di rendimento) finiscono per alterare pesantemente la composizione stessa dei portafogli, soprattutto quando nell'universo investibile di riferimento sono presenti asset class con combinazioni rischio-rendimento molto simili (poiché se le variazioni dovute agli errori di stima impattassero questo genere di asset class, si altererebbe facilmente il rapporto di prevalenza/dominanza tra le stesse).

Un'ultima problematica derivante dalla mancata considerazione dell'*estimation risk* risulta essere quella che porta alla presenza di un solo portafoglio ottimo per ogni livello di rischio: se si considera che le stime campionarie altro non sono che possibili realizzazioni di una variabile aleatoria, per ogni valore di volatilità la frontiera efficiente ammetterebbe più punti in corrispondenza di ciascuno dei quali si troverebbe un portafoglio ottimo (e verrebbe a questo punto negato "l'assioma" di unicità dei portafoglio ottimi).

Una semplice ma esplicativa dimostrazione di quanto il fenomeno dell'*estimation risk* possa sconvolgere in maniera drastica la composizione di portafoglio è stata proposta da Braga in "Asset management e investitori istituzionali", dove considerando un portafoglio costituito da 4 generiche asset class, la variazione di pochi *basis points* (che rappresenta una più che attendibile possibile manifestazione di *estimation* error) nei parametri di rischio e rendimento

[17] Michaud (1989), pag 33.

finisce per stravolgere completamente la composizione dei portafogli lungo tutta la frontiera efficiente in questione.[18]

Una volta assunto quindi che l'*estimation error* sia il principale responsabile delle problematiche derivanti dall'*estimation risk*, occorre ora citare alcune semplici modalità attraverso le quali si possa, almeno in parte, attenuare l'incisività del rischio di stima nell'attribuzione degli *optimal weights* alle varie asset class:
Sotto l'ipotesi che le variabili aleatorie che fungono da input nel processo di ottimizzazione siano *i.i.d.* (indipendentemente e identicamente distribuite), lo stimatore $\bar{R}_i$ diventa più accurato all'aumentare della popolazione campionaria (*sample size)* poiché in questo modo il valore atteso dei termini di errore tende a diminuire, e lo stimatore $COV_{i,j}$ diventa più preciso nell'approssimare la "vera" matrice di varianza-covarianza tanto più aumenta il rapporto $\frac{T}{N}$, dove T è il numero di osservazioni storiche di rendimento disponibili per ogni asset class e N indica il numero di asset class considerate nell'universo investibile. Non manca nella letteratura scientifica l'individuazione di ulteriori e robuste metodologie per attenuare il problema dell'*estimation risk*, tra i più noti contributi in questo ambito troviamo il metodo degli *additional weight constraint*, il metodo del *resampling* proposto da Richard e Robert Michaud[19], e l'utilizzo di approcci bayesiani nell'attività di costruzione dei portafogli finanziari strategici.[20]

[18] "Asset management e investitori istituzionali", Basile, Braga, Ferrari, capitolo 4 pag. 105
[19] Procedura brevettata nel 1999 (US patent 6,003,018) intitolata "Portfolio Optimization by Means of Resampled Efficient Frontier".
[20] Per uno studio più approfondito a riguardo si rinvia a "Asset management e investitori istituzionali", Basile, Braga, Ferrari, capitolo 4, pag 116-152.

2. L’ASSET ALLOCATION SECONDO LA STRATEGIA GLOBAL MINIMUM VARIANCE (GMVP) E SECONDO LA MOST DIVERSIFIED PORTFOLIO STRATEGY (MDP)

2.1 Introduzione alle *μ-free strategies*.

L’elegante e robusta metodologia elaborata da Harry Markowitz per approcciare il problema *dell’asset allocation*, di cui è stato trattato nel capitolo 1, ha subito forti accuse da parte della letteratura finanziaria già nei suoi primi anni di vita. La maggioranza degli accademici, pur riconoscendo a Markowitz il merito di aver proposto un framework quantitativo robusto per la questione della costruzione dei portafogli strategici, considerano la *Mean-Variance Optimization* una strategia poco implementabile nella realtà operativa a causa delle problematiche derivanti dall’*estimation risk* che da esso emergono: la natura controintuitiva dei *mean-variance efficient* portfolios (che risultano molto concentrati verso le asset class che presentano attraenti *trade-off* rischio-rendimento), la loro instabilità al variare degli input (suscettibilità agli errori di stima), la loro non unicità e la loro scarsa *out-of-sample performance*.

Per tal motivo, dagli anni ’80 gli sforzi da parte degli accademici e praticanti per ricercare soluzioni alternative alla MVO sono aumentati di numero e intensità, rivolgendosi principalmente all’elaborazione di metodologie innovative per una corretta ed efficiente gestione dell’*estimation error*, nell’ottica di ridurne l’impatto in sede di attribuzione dei pesi ottimi alle asset class detenute dal portafoglio.[21]

Come già accennato, gli input necessari all’ottimizzazione che più risentono dell’impatto degli *estimation errors* sono le medie campionarie dei rendimenti delle *asset class*: Best e Grauer (1991) affermano che gli errori nei parametri di varianze, covarianze e correlazioni risultano meno incisivi rispetto a quelli sulle stime di rendimento in tema di definizione dei pesi ottimi da attribuire alle varie *asset class*. Chopra e Ziemba (1993) affinano l’analisi proposta dai colleghi arrivando ad asserire che gli errori riguardanti la media campionaria risultano essere 10 volte più “costosi” di quelli riguardanti le varianze, che a loro volta sembrano essere 2 volte più importanti degli stessi errori di stima relativi alle covarianze.[22]

[21] Si fa qui riferimento agli approcci Bayesiani ed Euristici.
[22] “Risk Based Approaches to Asset Allocation – Concepts and Practical Applications”, Braga M.D. (2016), Capitolo 2 pag 11.

In seguito alla crisi finanziaria del 2008 diverse innovazioni sono state apportate nell'ambito dell'*asset management*, guidate dalla volontà di elaborare nuovi approcci alla costruzione di portafogli ottimi prescindendo dall'impostazione *mean-variance*: si fa riferimento alle cosiddette *risk based asset allocation strategies*. Esse differiscono fortemente dal MVO in quanto, per la definizione dei pesi ottimi da assegnare alle varie asset class, prescindono totalmente dall'utilizzo dei rendimenti attesi come input. Per questo motivo, le strategie *risk based* vengono anche definite *μ-free strategies.*[23]

È evidente che la scelta di abbandonare le stime di rendimento come input per il problema di ottimizzazione sia stata dettata dalla volontà di ottenere portafogli ottimizzati che risentissero in misura minore dei problemi di stima derivanti dall'approssimazione della funzione di distribuzione dei rendimenti. Infatti, le *μ-free strategies,* non richiedendo in alcun modo la stima del rendimento prodotto dalle varie macrocategorie di investimento in fase di implementazione, riescono a ridurre drasticamente l'esposizione all'*estimation error* da parte dei portafogli che ne derivano. Queste strategie mettono dunque al centro della costruzione dei portafogli le misure di rischio, nell'ottica di minimizzarlo e diversificarlo tra i vari componenti dei portafogli stessi.

Un'ulteriore differenza tra la classica Mean-Variance Optimization e le strategie *risk-based* risiede nel fatto che, mentre la prima metodologia restituisce un set di portafogli ottimi (uno per ciascun livello di rischio desiderato), le seconde producono una ed una sola possibile soluzione al problema dell'*asset allocation*.[24]

Tra le strategie *risk-based* che hanno ottenuto un maggiore successo in termini operativi ritroviamo sicuramente la *risk parity strategy*, la *equally-weighted strategy*, la *minimum-variance strategy* e la *most diversified portfolio strategy*.

Queste strategie rispondono alle esigenze di un insieme di soggetti che condividono un certo grado di avversione al rischio, tuttavia esse lo approcciano in maniera differente. La *risk parity strategy*, anche denominata *equally weighted risk contribution strategy/portfolio* (ERC portfolio) concentra i propri sforzi sulla diversificazione del rischio tra i vari componenti del portafoglio, in particolare essa è indirizzata alla costruzione di un portafoglio nel quale il rischio aggregato dipende in misura uguale da tutti i componenti dello stesso. Le altre strategie

[23] Braga M.D. (2015).

[24] Ovviamente, dato il livello di rischio del portafoglio ottenuto implementando una strategia *risk based*, nulla vieta all'asset manager di applicare un *leverage* in modo da essere esposto ad un livello di rischio superiore (o inferiore) in relazione alle sue aspettative di rendimento.

sopracitate si differenziano dalla prima in quanto esse non richiedono, nel processo di implementazione, alcuna misura di *risk budgeting* (si fa riferimento alle misure di *marginal risk*, *risk contribution* e *percentage total risk contribution*). La *equally-weighted strategy* pone al centro dell'attenzione il concetto di diversificazione, e in questi termini potrebbe essere considerata simile alla *risk parity strategy*, tuttavia mentre la seconda detta una diversificazione del rischio tale per cui ogni componente del portafoglio debba contribuire in modo uguale agli altri componenti alla formazione del rischio aggregato, la *equally-weighted strategy* richiede solamente che tutte le asset class di cui il portafoglio si compone abbiamo pesi identici tra loro. In altri termini, la *equally-weighted strategy* ricerca il portafoglio meno concentrato in termini di pesi attribuiti ai componenti, mentre la *risk parity strategy* ricerca il portafoglio meno concentrato in termini di rischio apportato dai singoli componenti.[25] La *minimum-variance strategy* pone come soluzione alla questione dell'*asset allocation* la minimizzazione del rischio in termini assoluti, infatti il *Global Minimum Variance Portfolio* (GMVP) è proprio quel portafoglio che rappresenta il punto più a sinistra della frontiera efficiente in un contesto *mean-variance*. Infine, la *most diversified portfolio strategy* è indirizzata ad ottenere un portafoglio che sfrutti nella maniera più completa possibile la diversità dei componenti appartenenti all'universo investibile al fine di creare la maggior distanza possibile tra il rischio "vero" di portafoglio e il rischio massimo che questo potrebbe presentare.[26] La definizione dell'algoritmo di ottimizzazione per questo genere di strategia fu introdotta da Choueifaty e Coignard (2008) che contestualmente avanzarono la definizione di *Diversification Ratio*, la quale nei successivi paragrafi del presente capitolo verrà indagata accuratamente affiancata dalla sua decomposizione in termini analitici.

Il presente contributo si propone di indagare le ultime due strategie citate: esse rispondono maggiormente alle esigenze di quei soggetti che approcciano il rischio nell'ottica di abbatterlo, piuttosto che puntando ad una sua ridistribuzione all'interno del portafoglio.

[25] "Risk Based Approaches to Asset Allocation – Concepts and Practical Applications", Braga M.D. (2016), Capitolo 4 pag 44.

[26] Il rischio massimo che un generico portafoglio può presentare corrisponde alla media ponderata dei rischi dei suoi componenti, ovvero alla situazione in cui ogni componente del portafoglio presenti una correlazione perfettamente positiva con ogni altro componente.

2.2. Decomposizione del rischio di portafoglio.

Considerando che le strategie sopracitate fanno del parametro di rischio il principale input per operare i propri algoritmi di ottimizzazione, occorre ora spendere qualche parola riguardo alla decomposizione del rischio aggregato/totale di portafoglio, nell'ottica di fornire dei *tool* tramite i quali calcolare la misura in cui le singole asset class detenute in un generico portafoglio contribuiscano alla formazione del rischio totale dello stesso.

Al fine di introdurre questi strumenti per la decomposizione del rischio, la letteratura scientifica riguardante il *risk budgeting* sostiene che in un primo momento sia necessario introdurre il Principio di Euler:[27]

Secondo Euler, se RM è una generica misura di rischio (come ad esempio la deviazione standard) che può essere rappresentata come una funzione continuamente differenziabile di un vettore di pesi, tale per cui:

$$RM = f(\boldsymbol{w})$$

E tale funzione è linearmente omogenea (ovvero è una funzione omogenea di grado k con $k = 1$) tale per cui:

$RM(\lambda\mathbf{w}) = \lambda \mathrm{RM}(\mathbf{w})$ per ogni $\lambda > 0$

Allora è possibile affermare che aumentando (diminuendo) la scala del portafoglio di una certa misura aumenta (diminuisce) la misura di rischio nella stessa proporzione, dunque la misura di rischio rispetta la seguente equazione:

$$\mathrm{RM}(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{N} w_i \frac{dRM}{dw_i}$$

Gli addendi dell'equazione, denominati *Euler's contributions* sono rappresentativi della contribuzione al rischio complessivo da parte dell'i-esimo componente. È ora possibile identificare i componenti necessari per attuare un'operazione di scomposizione del rischio, a cui vengono attribuite le seguenti simbologie:

- $MR_i = \frac{dRM}{dw_i}$ rappresenta la contribuzione marginale al rischio di ogni i-esima asset class. Questa misura, comunemente denominata "rischio marginale" (*marginal risk*),

[27] Denault (2001), Tasche (2008), Roncalli (2014).

coincide con la derivata di primo ordine della misura di rischio di portafoglio rispetto al peso della i-esima asset class.

- $TRC_i = w_i \frac{dRM}{dw_i}$ rappresenta la contribuzione totale al rischio di portafoglio da parte della i-esima asset class (*total risk contribution*, talvolta denominata semplicemente *risk contribution*). Essa coincide con il prodotto tra il rischio marginale della i-esima asset class e il suo peso all'interno del portafoglio.

Definite queste misure di decomposizione del rischio di portafoglio, è ora possibile interpretarle al fine di poter comprendere le modalità e poter calcolare la misura in cui una generica asset class detenuta in portafoglio "giochi un ruolo" nella definizione del rischio a cui effettivamente sarà esposto l'investitore:

MR_i esprime la variazione del rischio di portafoglio conseguente ad una variazione infinitesimale del peso della i-esima asset class assumendo implicitamente che ciascun cambiamento nelle posizioni assunte è reso possibile da apporto o sottrazione di denaro senza intervento sulle restanti posizioni.[28] Il rischio marginale dunque esprime la sensibilità della misura di rischio al variare di w_i, indicata come:

$$MR_i = \lim_{\Delta w_i \to 0} \frac{RM(w_1, w_2, \dots, w_i + \Delta w_i, \dots, w_n) - RM(w_1, w_2, \dots, w_i, \dots, w_n)}{\Delta w_i}$$

Dove Δw_i rappresenta l'incremento di w_i. Se questo incremento è sufficientemente piccolo (infinitesimale) si può affermare che:

$$RM(w_1, w_2, \dots, w_i + \Delta w_i, \dots, w_n) = RM(w_1, w_2, \dots, w_i, \dots, w_n) + \Delta w_i \frac{dRM}{dw_i}$$

La *total risk contribution* invece rappresenta la misura in cui la i-esima posizione contribuisce alla formazione del rischio totale di portafoglio, essa è definita dal prodotto tra il rischio marginale e il peso della i-esima asset class:

$$TRC_i = w_i \frac{dRM}{dw_i}$$

Per determinare quanto una singola asset class contribuisca, in termini percentuali, alla formazione del rischio totale del portafoglio è sufficiente rapportare TRC_i alla misura

[28] "Risk Based Approaches to Asset Allocation – Concepts and Practical Applications", Braga M.D. (2016), Capitolo 3 pag 20.

rappresentativa del rischio di portafoglio RM, ottenendo in questo modo la *percentage total risk contribution* della i-esima asset class:

$$PTRC_i = \frac{w_i \frac{dRM}{dw_i}}{RM} = \frac{TRC_i}{RM}$$

Le formule sovraesposte possono essere adattate al parametro più comunemente rappresentativo del rischio di portafoglio: la deviazione standard. Consideriamo, per semplicità, un portafoglio costituito da 2 asset class denominate A e B, in questo caso la formula di calcolo del rischio di portafoglio si presenta nel seguente modo:

$$\sigma_{PORT} = \sqrt{(\sigma_A w_A)^2 + (\sigma_B w_B)^2 + 2\sigma_A \sigma_B w_A w_B \rho_{A,B}}$$

Operando la derivata prima della sovraesposta equazione rispetto a w_A si ottiene il rischio marginale di A:

$$MR_{\sigma\_A} = \frac{d\sigma_{PORT}}{dw_A} = \frac{2\sigma_A^2 w_A + 2\sigma_A \sigma_B w_B \rho_{A,B}}{2\sqrt{(\sigma_A w_A)^2 + (\sigma_B w_B)^2 + 2\sigma_A \sigma_B w_A w_B \rho_{A,B}}} =$$

$$= \frac{\sigma_A^2 w_A + \sigma_A \sigma_B w_B \rho_{A,B}}{\sqrt{(\sigma_A w_A)^2 + (\sigma_B w_B)^2 + 2\sigma_A \sigma_B w_A w_B \rho_{A,B}}} = \frac{\sigma_A^2 w_A + COV_{A,B} w_B}{\sqrt{(\sigma_A w_A)^2 + (\sigma_B w_B)^2 + 2\sigma_A \sigma_B w_A w_B \rho_{A,B}}}$$

In modo analogo è possibile ricavare il rischio marginale di B:

$$MR_{\sigma\_B} = \frac{d\sigma_{PORT}}{dw_B} = \frac{2\sigma_B^2 w_B + 2\sigma_A \sigma_B w_A \rho_{A,B}}{2\sqrt{(\sigma_A w_A)^2 + (\sigma_B w_B)^2 + 2\sigma_A \sigma_B w_A w_B \rho_{A,B}}} =$$

$$= \frac{\sigma_B^2 w_B + \sigma_A \sigma_B w_A \rho_{A,B}}{\sqrt{(\sigma_A w_A)^2 + (\sigma_B w_B)^2 + 2\sigma_A \sigma_B w_A w_B \rho_{A,B}}} = \frac{\sigma_B^2 w_B + COV_{A,B} w_A}{\sqrt{(\sigma_A w_A)^2 + (\sigma_B w_B)^2 + 2\sigma_A \sigma_B w_A w_B \rho_{A,B}}}$$

Dato che la contribuzione al rischio della i-esima *asset class* è pari al prodotto tra la sua misura di rischio marginale e l'esposizione del portafoglio verso la stessa *asset class*, è possibile definire le misure di *risk contribution* per le componenti A e B:

$$TRC_{\sigma\_A} = w_A \frac{d\sigma_{PORT}}{dw_A} = \frac{\sigma_A^2 w_A^2 + COV_{A,B} w_B w_A}{\sqrt{(\sigma_A w_A)^2 + (\sigma_B w_B)^2 + 2\sigma_A \sigma_B w_A w_B \rho_{A,B}}}$$

$$TRC_{\sigma\_B} = w_B \frac{d\sigma_{PORT}}{dw_B} = \frac{\sigma_B^2 w_B^2 + COV_{A,B} w_A w_B}{\sqrt{(\sigma_A w_A)^2 + (\sigma_B w_B)^2 + 2\sigma_A \sigma_B w_A w_B \rho_{A,B}}}$$

Per la definizione di *total risk contribution* vale la seguente uguaglianza:

$$\sigma_{PORT} = TRC_{\sigma\_A} + TRC_{\sigma\_B}$$

La contribuzione percentuale al rischio delle *asset class* A e B è misurabile rapportando la loro contribuzione totale al rischio alla misura di rischio aggregato di portafoglio, in termini analitici:

$$PTRC_{\sigma\_A} = \frac{w_A \frac{d\sigma_{PORT}}{dw_A}}{\sigma_{PORT}} = \frac{TRC_{\sigma\_A}}{\sigma_{PORT}}$$

$$PTRC_{\sigma\_B} = \frac{w_B \frac{d\sigma_{PORT}}{dw_B}}{\sigma_{PORT}} = \frac{TRC_{\sigma\_B}}{\sigma_{PORT}}$$

Estendendo le formule sopracitate ad un contesto di portafogli costituiti da N *asset class* (con $N > 2$) è possibile esplicitare le formule di calcolo di rischio marginale, contribuzione totale al rischio e contribuzione percentuale al rischio riferite ad una generica *asset class*:

$$MR_{\sigma\_i} = \frac{d\sigma_{PORT}}{dw_i} = \frac{\sigma_i^2 w_i + \sum_{j\neq i}^{N} w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}}{\sigma_{PORT}} = \frac{\sigma_i^2 w_i + \sum_{j\neq i}^{N} w_j \sigma_{ij}}{\sigma_{PORT}} = \frac{\sum_{j=1}^{N} w_j \sigma_{ij}}{\sigma_{PORT}}$$

In termini matriciali, il vettore di dimensione $(N \times 1)$ contenente i rischi marginali di tutte le asset class rappresentate nel portafoglio è pari a:

$$\nabla \mathbf{MR}_{\sigma} = \frac{\mathbf{COVw}}{\sqrt{\mathbf{w}'\mathbf{COVw}}}$$

Il rischio marginale della singola asset class è dunque definito nel seguente modo:

$$\text{MR}_{\sigma\_i} = \frac{(\mathbf{COVw})_{\boldsymbol{i}}}{\sqrt{\mathbf{w}'\mathbf{COVw}}}$$

Dove $(\mathbf{COVw})_{\boldsymbol{i}}$ indica la i-esima riga del vettore colonna derivante dal prodotto tra la matrice di covarianza di dimensioni $(N \times N)$ e il vettore colonna dei pesi di dimensioni $(N \times 1)$.

Secondo questa impostazione, il rischio marginale dell'*asset class i* dipende sia dal peso della stessa all'interno del portafoglio sia dalla covarianza tra l'i-esima *asset class* e ogni altra *asset class* detenuta, ponderata in base al peso della j-esima *asset class* in questione. Pertanto, secondo Braga (2016): " Therefore we can infer that it may happen that an increase in w_i doesn't result in rising the portfolio risk if asset class *i* has negative covariance with other asset classes and their relative weight is not too negligible."[29]

Si procede ora a dare una definizione in termini analitici della contribuzione al rischio per una generica *asset class* i:

$$TRC_{\sigma\_i} = w_i \frac{d\sigma_{PORT}}{dw_i} = w_i \frac{\sigma_i^2 w_i + \sum_{j\neq i}^{N} w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}}{\sigma_{PORT}} = w_i \frac{\sigma_i^2 w_i + \sum_{j\neq i}^{N} w_j \sigma_{ij}}{\sigma_{PORT}} =$$

$$= w_i \frac{\sum_{j=1}^{N} w_j \sigma_{ij}}{\sigma_{PORT}} = \frac{\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}}{\sigma_{PORT}}$$

In termini matriciali la contribuzione totale al rischio della i-esima *asset class* è pari a:

$$TRC_{\sigma\_i} = w_i \frac{(\mathbf{COVw})_{\boldsymbol{i}}}{\sqrt{\mathbf{w}'\mathbf{COVw}}}$$

A questo punto è possibile riscrivere la formula del rischio aggregato di portafoglio σ_{PORT} come somma delle contribuzioni totali al rischio di tutte le *asset class* contenute nel portafoglio stesso:

$$\sigma_{PORT} = \sum_{i=1}^{N} TRC_{\sigma\_i} = \mathbf{w}' \frac{\mathbf{COVw}}{\sqrt{\mathbf{w}'\mathbf{COVw}}} = \mathbf{w}'\nabla\mathbf{MR}_{\sigma}$$

Definire i concetti alla base del *risk budgeting* risulta di fondamentale importanza per diversi motivi. Innanzitutto, essi sono fondamentali nell'implementazione della *risk parity strategy*, in quanto essa richiede che la contribuzione al rischio sia costante per tutte le asset class contenute

[29] "Risk Based Approaches to Asset Allocation – Concepts and Practical Applications", Braga M.D. (2016), Capitolo 3 pag 22.

in portafoglio. In secondo luogo, esse sono molto utili a comprendere le differenti caratteristiche delle strategie che l'elaborato si pone di analizzare e confrontare; infatti, come sarà possibile notare proseguendo la lettura, operando un esercizio di decomposizione del rischio sui portafogli ottenuti attraverso i differenti approcci del GMVP e del MDP, si ottengono dei risultati molto utili a comprendere la natura delle strategie stesse.

Si propone ora un esercizio di decomposizione del rischio di un portafoglio, che identificheremo con P(EX), composto da quattro generiche *asset class* denominate A, B, C e D. Tale esercizio risulterà utile a comprendere come un portafoglio, apparentemente ben bilanciato sotto il profilo dell'*asset allocation*, possa risultare molto sbilanciato in termini di *risk contribution*. Si immagini dunque un generico investitore che detiene un portafoglio le cui caratteristiche sono riassunte nelle tabelle 1.1. e 1.2. Il portafoglio in questione presenta un valore di rendimento atteso pari a 6,250% e una deviazione standard pari a 7,362%. Attuando l'esercizio di *risk budgeting* riguardo alla deviazione standard annualizzata di P(EX) si ottengono i risultati esposti nella tabella 1.3.

I risultati mostrano una grande differenza tra i pesi attribuiti alle *asset class* e la loro reale contribuzione al rischio del portafoglio: l'*asset class* D, verso la quale il portafoglio è esposto al 45%, contribuisce alla formazione del rischio totale solamente per il 10,33%. Ciò è dovuto principalmente alla ridotta deviazione standard di D e alle correlazioni negative che questa presenta nei confronti delle *asset class* A e B. Di converso, le *asset class* A e B, alle quali vengono attribuiti valori d'inclusione rispettivamente del 20 e del 10%, contribuiscono al rischio di portafoglio rispettivamente per il 41,62 e 24,42% (nel complesso queste due componenti giustificano il rischio di portafoglio per il 66,04%, seppur solamente il 30% del capitale complessivamente investito sia destinato ad esse). Anche in questo caso, il risultato dipende sia dagli elevati valori di rischio di A e B sia dagli elevati valori di correlazioni che presentano con l'*asset class* C e reciprocamente.

Tabella 1.1: P(EX) - Caratteristiche delle generiche asset class.

Asset class	**Esposizioni**	**Rendimento annualizzato**	**Dev. Standard Annualizzata**
A	20%	10%	20%
B	10%	12%	25%
C	25%	5%	9%
D	45%	4%	6%

Tabella 1.2: P(EX) - Matrice di correlazione delle generiche asset class.

	A	**B**	**C**	**D**
A	**1**	0,8	0,2	-0,3
B	0,8	**1**	0,3	-0,4
C	0,2	0,3	**1**	0,7
D	-0,3	-0,4	0,7	**1**

Tabella 1.3: P(EX) - Risk decomposition.

Asset class	A	B	C	D
MR	0,1532	0,1798	0,0695	0,0169
TRC	0,0306	0,0179	0,0173	0,0076
PTRC	41,62%	24,42%	23,61%	10,33%

2.3. Global Minimum Variance Portfolio

La *Global minimum variance portfolio* è una strategia di investimento che in seguito alla crisi finanziaria del 2008, durante la quale è stato avvertito un generale aumento della *risk-aversion*, ha acquisito un certo grado di notorietà nell'ambito dell'*asset management*, sebbene le sue origini risalgano al lontano 1952, anno di pubblicazione del celebre contributo di Markowitz, intitolato *Portfolio Selection*. Nel contributo sopracitato si faceva in particolare riferimento al GMVP descrivendolo come il portafoglio caratterizzato dalla minima deviazione standard exante, individuandolo sul punto di origine (più a sinistra) del *feasible set* descritto nella sezione 4 del capitolo 1.

Inizialmente la strategia in questione ha trovato ampio spazio di applicazione nell'ambito della *security selection*, piuttosto che nell'ambito della costruzione di portafogli come insieme di *asset class*. La letteratura scientifica ha ampiamente argomentato come la GMVP traesse beneficio da un aspetto della realtà operativa in forte contrasto con uno dei principi cardine della scienza finanziaria: la *low risk anomaly*. Con questa espressione si fa riferimento a quella situazione di *outperformance* all'interno dei mercati azionari da parte delle *low-risk stocks*[30], in netto contrasto con il noto principio secondo il quale strumenti finanziari caratterizzati da contenuti parametri di rischio debbano presentare altrettanto contenuti parametri di rendimento.

Haugen and Baker (1991) avanzarono un primo studio empirico avente ad oggetto il GMVP, affermando, in un contesto *mean-variance*, la sua dominanza rispetto ad un indice *capitalization weighted* relativo al mercato azionario statunitense, esso rappresentava un elevato numero di titoli azionari il quale insieme fu proprio utilizzato dagli autori come universo investibile per la costruzione del portafoglio a varianza minima. Gli stessi autori, in un articolo successivo pubblicato nel 2012, giunsero ad affermare che le azioni caratterizzate da una *low-volatility* presentavano migliori indici di Sharpe[31] rispetto ad azioni con parametri di volatilità superiori.[32] Essi utilizzarono le conclusioni tratte dall'articolo pubblicato nel 2012 per attribuire il merito della performance del GMVP proprio agli elevati rapporti tra *excess return* e deviazioni standard dei costituenti dello stesso.

La tesi sostenuta da Haugen e Becker fu successivamente confermata da Clarke et al. (2006,2011) che testarono su un periodo di analisi estremamente significativo la dominanza, sia in termini di rischio che di performance, del GMVP rispetto ad un *large-cap index* statunitense.

[30] "Strategie di risk reduction per i portafoglio: un primo esame", Braga M.D. (2017).

[31] L'indice di Sharpe è un indicatore di redditività corretta per il rischio. Esso misura su un certo orizzonte temporale il rendimento in eccesso rispetto al rendimento di un'attività *risk free* per ogni punto di rischio assunto. Esso è dunque pari al rapporto tra *excess return* e deviazione standard di un portafoglio, definito nella seguente maniera:

$$SHARPE\ RATIO_P = \frac{\bar{R}_{PORT} - \bar{R}_{riskfree}}{\sigma_{PORT}}$$

[32] L'analisi in questione fu condotta su un universo investibile molto ampio, rappresentato da titoli azionari negoziati in 30 paesi differenti per un periodo di analisi pari a 20 anni.

Diversi autori[33] hanno argomentato circa le possibili spiegazioni riguardanti la violazione del principio media-varianza da parte delle *low-risk stocks*, arrivando a definire come essa possa dipendere dai *leverage-constraints* comunemente imposti ai portfolio managers: proponendosi di "aggirare" l'impedimento ad assumere leva finanziaria, essi risultano domandare con intensità le *high-beta stocks*, suscitando un calo del rendimento conseguito da quest'ultime.

Altri membri della comunità scientifica (si fa particolare riferimento a Russo, 2016) giustificano la *low-risk anomaly* affermando che alle *high-beta stocks*[34] debba essere riconosciuto un pricing superiore rispetto a quello definito dalla *security market line* descritta nel CAPM[35], per due principali motivazioni:
Da una parte questo genere di strumenti presenta valori di *skewness* maggiori rispetto alle opposte *low-beta stocks* e, come discusso nella prima parte del presente elaborato, questa caratteristica risulta essere attraente sotto il punto di vista di un generico investitore razionale, al punto che egli dovrebbe essere predisposto a rinunciare a punti di rendimento atteso per ottenere maggiori valori del terzo momento statistico. Dall'altra parte, essendo questi strumenti caratterizzati da una convessità positiva, in caso di performance positive del mercato di riferimento essi sarebbero in grado di conseguire performance superiori a quelle del mercato stesso nella misura del prodotto tra la performance del mercato e il beta del titolo in questione. In modo analogo, in caso di performance negative del mercato essi presenterebbero un limite alle perdite rappresentato dalla somma del capitale investito.

Si procede dunque ad illustrare l'algoritmo definito per costruire il GMVP e alle proprietà che caratterizzato questo genere di portafoglio.

Innanzitutto occorre dire che, seppur il *global minimum variance portfolio* sia stato inizialmente definito in un contesto *mean-variance*, per la sua definizione in termini di pesi da attribuire alle *asset class* è possibile prescindere totalmente dall'utilizzo dei rendimenti attesi delle stesse come input per l'ottimizzazione, limitandosi all'utilizzo dei parametri di rischio e correlazione

---

[33] Black (1993), Carvahlo et al. (2011), Frazzini e Pedersen (2013).
[34] Il Beta di un titolo è un indicatore che misura l'andamento del titolo rispetto al mercato, in particolare esso esprime la variazione che il titolo sperimenta rispetto alle variazioni di mercato. Esso è dunque un indicatore di sensibilità/reattività di un titolo azionario rispetto ad un indice di mercato a cui il titolo fa riferimento. Esso è calcolabile attraverso la seguente formula:

$$\beta_i = \rho_{i,m} \frac{\sigma_i}{\sigma_m}$$

Dove un titolo che presenta valori $\beta_i < 1$ risulta poco sensibile ai fattori di rischio sistematico, mentre un titolo che presenta $\beta_i > 1$ risulta più sensibile agli stessi fattori di rischio (e quindi più sensibile al dinamismo del mercato stesso).
[35] Sharpe (1964).

dei componenti dell'universo investibile. Questa caratteristica la contraddistingue di diritto come strategia appartenente al novero delle *risk based strategies*.

Dal punto di vista pratico, l'algoritmo di ottimizzazione del GMPV si compone dei comuni elementi relativi alla funzione obbiettivo e ai vincoli tecnici. Ovviamente, essendo il portafoglio costruito senza porre attenzione all'aspetto di rendimento, l'algoritmo da cui esso deriva non presenta il vincolo finanziario che invece risulta fondamentale per la definizione di tutti i rimanenti portafogli che appartengono alla frontiera efficiente.

La funzione obbiettivo della presente strategia è rappresentata dalla formula della deviazione standard di portafoglio, della quale si richiede la minimizzazione, tenendo conto dei classici vincoli di *Budget constraint* e di *Long only constraint.*

Si consideri dunque un portafoglio costituito da N *asset class*, indicando con **w** il vettore $(N \times 1)$ contenente i pesi di portafoglio, con **e** un vettore $(N \times 1)$ composto da sole grandezze unitarie e con $\boldsymbol{COV}$ la matrice di covarianza di dimensioni $(N \times N)$, l'algoritmo di ottimizzazione si presenta nella seguente formulazione:

$$\underset{w^*}{MIN}\,\boldsymbol{w'COVw}$$

Sotto i vincoli:

$$\boldsymbol{w'}\mathbf{e} = 1$$

$$[w] \geq 0$$

In termini analitici lo stesso problema può essere cosi riscritto:

$$MIN\sigma_{PORT} = \underset{w^*}{MIN}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(\sigma_i w_i)^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}\right)}$$

Sotto i vincoli:

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0$$

Nell'ipotesi in cui venga rimosso il vincolo secondo il quale non è ammessa la possibilità di assumere posizioni *short*, è possibile, nel caso in cui la matrice di covarianza risulti invertibile (ovvero nel caso in cui $\det(\boldsymbol{COV}) \neq 0$)[36], calcolare direttamente la soluzione dell'algoritmo attraverso la seguente formula, pervenendo alla definizione del *long-short minimum variance portfolio*[37]:

$$w^* = \frac{\boldsymbol{COV^{-1}e}}{\boldsymbol{e'COV^{-1}e}}$$

Operando l'algoritmo di ottimizzazione con riguardo all'universo investibile composto dalle quattro *asset class* introdotte nella sezione 2 del presente capitolo si ottiene l'*asset allocation* consigliata per il GMVP, la quale è esposta nella tabella 2.1 assieme alla decomposizione del rischio del portafoglio così ottenuto.

Tabella 2.1. GMVP: asset allocation e risk decomposition

	Esposizione	**Marginal Risk**	**Risk contribution**	**Percentage total risk contribution**
A	5%	0,0488	0,0022	4,5373%
B	9%	0,0488	0,0044	9,2012%
C	0%	0,0827	0,0000	0,0000%
D	86%	0,0488	0,0421	86,2615%

Il portafoglio così ottenuto presenta un rendimento annualizzato pari a 5,008% ed un valore di deviazione standard annualizzata pari a 4,889%. È istantaneo notare come l'algoritmo di ottimizzazione tenda ad assegnare un elevato peso all'*asset class* D, ciò avviene in quanto essa presenta un contenuto valore di rischio e valori di correlazione negativi con le *asset class* A e B.

L'esempio rende palese una caratteristica distintiva del GMVP: esso mostra la tendenza ad assegnare pesi elevati alle *asset class* che presentano ridotti livelli di rischio e/o correlazioni

[36] La problematica relativa alla non singolarità della matrice di covarianza può emergere, ad esempio, nel caso in cui il numero di componenti dell'universo investibile risulti più ampio delle osservazioni temporali a disposizione.
[37] "Minimum-Variance Portfolio Composition" Clarke, De Silva, Thorley, 2011.

negative con le altre categorie di investimento. Per lo stesso motivo la strategia risulta essere molto sensibile agli errori di stima delle volatilità e delle correlazioni tra i componenti del portafoglio.

L'esercizio di decomposizione del rischio fornisce diversi spunti per riflettere riguardo alla natura e alle proprietà del portafoglio~~:~~. Innanzitutto, i portafogli cosi costruiti ammettono la possibilità di parziale inclusione dei componenti dell'universo investibile.[38] Inoltre, nel GMVP il valore del rischio marginale è costante per tutti i componenti del portafoglio, se così non fosse, come sottolineato da Scherer (2015), si avrebbe prova della possibilità di ridurre ulteriormente il rischio di portafoglio diminuendo il peso di un'*asset class* con "elevato" valore di rischio marginale, a favore di una maggiore inclusione di un altro componente con "ridotto" rischio marginale.[39] Per quanto appena detto, non è errato sostenere che per il GMVP valga la seguente uguaglianza:

$$\frac{d\sigma_{PORT}}{dw_i} = \frac{d\sigma_{PORT}}{dw_j} \qquad \forall i, j$$

Questa caratteristica non deve essere mal interpretata: il fatto che il rischio marginale sia costante per tutte le *asset class* contenute in portafoglio non significa che la *total risk contribution* delle stesse sia costante, in quanto queste presentano valori di inclusione diversi le une dalle altre.

Tuttavia, vi è omogeneità tra la *percentage total risk contribution* di una qualunque *asset class* presente in portafoglio e il peso attribuito alla stessa.

Infine, si può affermare che seppur il GMVP delinei la maggiore contrazione possibile del rischio di un portafoglio (sempre con riferimento all'universo investibile in questione), esso non risulti ben diversificato sotto il punto di vista dell'allocazione delle risorse finanziarie e del rischio.[40]

[38] Al contrario della *equally weighted strategy* e della *risk parity strategy*.
[39] Ciò andrebbe in contrasto con la natura stessa del GMVP, che per definizione risulta essere il portafoglio con la deviazione standard più contenuta in assoluto, relativamente all'universo investibile.
[40] "Risk Based Approaches to Asset Allocation – Concepts and Practical Applications", Braga M.D. (2016), Capitolo 4 pag 49.

2.4. Most Diversified Portfolio

Contrariamente al caso del GMVP, la letteratura che prende in esame il *Most diversified portfolio*, spesso definito anche *Maximum diversification portfolio*, è molto esigua. Questo è dovuto principalmente alla recente introduzione dello stesso nell'universo dell'*asset management*: il primo contributo a riguardo risale a poco più di un decennio fa, esso è intitolato "Toward Maximum Diversification" ed è attribuibile a Choueifaty e Cognard (2008). L'elaborato da essi redatto si proponeva di investigare le proprietà teoriche ed empiriche della diversificazione, al fine di utilizzarla come criterio per la costruzione dei portafogli strategici. Essi avanzarono inoltre un'analisi empirica volta a comparare il MDP con il relativo *market cap-weighted index* e con altre due strategie *risk based* (la GMVP e la *equally weighted strategy*), giungendo ad affermare la dominanza del primo in termini di rendimento corretto per il rischio lungo un periodo di analisi di 20 anni.
Choueifaty espanse la letteratura a riguardo con un successivo articolo intitolato "Properties of the Most Diversified Portfolio", Choueifaty, Froidure, Reynier (2013) nel quale trattava le proprietà matematiche del MDP, del *Diversification Ratio* e introduceva un set di "Portfolio invariance properties" che utilizzò per comparare nuovamente le diverse strategie *risk based* utilizzando il MSCI World come universo di riferimento.

Procedendo all'esame della strategia in questione, occorre sin da subito introdurre la misura del *Diversificatio Ratio* (DR) in quanto essa ricopre un ruolo centrale in fase di definizione ed implementazione della stessa. Questo strumento viene utilizzato per misurare il grado di diversificazione di portafoglio, esso è definito come il rapporto tra la media ponderata dei rischi delle *asset class* detenute in portafoglio e il rischio "vero" di portafoglio. In termini analitici esso può essere definito come:

$$DR_P = \frac{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i w_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\sigma_i w_i)^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(w_i w_j cov_{i,j}\right)}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i w_i}{\sigma_{PORT}}$$

In termini matriciali:

$$DR_P = \frac{\boldsymbol{w'\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{w'COVw}}} = \frac{\boldsymbol{w'}\sqrt{diag(\boldsymbol{COV})}}{\sqrt{\boldsymbol{w'COVw}}}$$

Dove $\boldsymbol{\sigma}$ è il vettore $(N \times 1)$ contenente le deviazioni standard delle N *asset class* e $diag(\boldsymbol{COV})$ rappresenta il vettore $(N \times 1)$ degli elementi situati sulla diagonale principale della matrice di covarianza.

Date le formule sovraesposte, risulta ora opportuno darne un'interpretazione in modo tale da capire la logica sottesa dal *Diversification Ratio*: esso esprime quanto, in termini percentuali, il rischio di portafoglio risulterebbe più elevato (rispetto al rischio "vero") nel caso in cui tutte le coppie di *asset class* presentino valori di correlazione perfettamente positivi. Ciò è facilmente intuibile osservando che al numeratore vi è la media ponderata dei rischi che si ricorda essere il valore di rischio più elevato che il portafoglio può teoricamente assumere, e che assume solamente nel caso in cui la matrice di correlazione mostri solamente valori pari a +1. In altri termini, il *diversification ratio* fornisce una misura di quanto elevato sia il risparmio di rischio derivante dalla diversificazione dei componenti del portafoglio.

Il DR presenta dunque le seguenti caratteristiche:

- Ha un limite inferiore in +1. Questo valore può essere registrato solamente nel caso di un portafoglio composto da una sola *asset class* o nel caso di valori di correlazioni costanti e pari a +1 per ogni possibile coppia di *asset class* contenuta in portafoglio.
- Non ha un limite superiore.

Si può affermare che valori del DR tendenti a +1 vadano a denotare portafogli scarsamente diversificati, mentre tanto maggiore è il valore che il DR assume, tanto più diversificato risulta il portafoglio. Ad esempio, se un portafoglio mostra un $DR = 1.43$ si può affermare con certezza che, nel caso in cui tutti i valori di correlazione tra i vari componenti del portafoglio fossero pari a +1, il rischio del portafoglio risulterebbe maggiore circa del 43% rispetto a quanto realmente è.

Per quanto riguarda l'algoritmo di ottimizzazione, la *most diversified portfolio strategy* richiede la massimizzazione di una funzione obbiettivo rappresentata dallo stesso *diversification ratio* di portafoglio (DR_P) da attuare attraverso un'adeguata selezione dei pesi da affidare alle varie *asset class* dell'universo investibile. Rimangono invariati i vincoli tecnici applicati alla *global minimum variance strategy*, ovvero il *full investment constraint* e il *non-short selling constraint*.

In algebra matriciale l'algoritmo assume la seguente formulazione:

$$\underset{w^*}{MAX} DR_P = \underset{w^*}{MAX} \frac{\boldsymbol{w}'\sqrt{diag(\boldsymbol{COV})}}{\sqrt{\boldsymbol{w}'\boldsymbol{COV}\boldsymbol{w}}}$$

Sotto i vincoli:

$$\boldsymbol{w}'\mathbf{e} = 1$$

$$[w] \geq 0$$

La versione analitica dello stesso problema di ottimizzazione è la seguente:

$$\underset{w^*}{MAX} DR_P = \underset{w^*}{MAX} \frac{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i w_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(\sigma_i w_i)^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(w_i w_j cov_{i,j}\right)}}$$

Sotto i vincoli:

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0$$

Nel caso in cui questo algoritmo venga implementato con riguardo ad un universo investibile costituito unicamente da *asset class* aventi uguali volatilità, gli output rappresentati dai pesi ottimi da assegnare a ciascuna di queste combacerebbero con quelli suggeriti dall'algoritmo di ottimizzazione della GMVP.[41]

Anche in questo caso è stato "lanciato" l'algoritmo di ottimizzazione del MDP con riferimento allo stesso universo investibile utilizzato per il GMVP, composto da quattro asset class le cui caratteristiche sono riportate nelle tabelle 1.1. e 1.2 della sezione 2 del presente capitolo. Si riporta nella tabella 2.2. l'*asset allocation* consigliata per il MDP, assieme al relativo esercizio di *risk budgeting* del portafoglio cosi ottenuto.

[41] "Risk Based Approaches to Asset Allocation – Concepts and Practical Applications", Braga M.D. (2016), Capitolo 4 pag 53.

Tabella 2.2. MDP: asset allocation e risk decomposition

	Esposizione	Marginal Risk	Risk contribution	Percentage total risk contribution
A	7%	0,1083	0,0071	13,5920%
B	15%	0,1353	0,0199	37,8640%
C	0%	0,0798	0,0000	0,0000%
D	79%	0,0324	0,0255	48,5440%

Il portafoglio così ottenuto presenta un rendimento annualizzato pari a 5,575% ed un valore di deviazione standard annualizzata pari a 5,265%. La media ponderata dei rischi delle *asset class* incluse risulta pari a 9,723%, il *diversification ratio* è dunque pari a 1,847. Il valore del DR spiega come l'aggregazione delle *asset class* con tali pesi induca ad una riduzione del rischio a cui è esposto l'investitore dell'84,7%, rispetto alla situazione in cui tutte le asset class di cui il portafoglio è composto presentino valori di correlazione perfettamente positivi. Il portafoglio così ottenuto è dunque quel portafoglio che, con riferimento al sovraesposto universo investibile, riesce a garantire il beneficio della diversificazione maggiore possibile per l'investitore. Si noti inoltre come la ricerca del maggior beneficio della diversificazione prescinda totalmente da una dispersione equilibrata dei rischio tra le *asset class* di cui il portafoglio si compone.

Tornando alla trattazione del DR, è facile immaginare come portafogli caratterizzati da pesi "concentrati" e/o elevati valori di correlazione tra i componenti risultino avere *diversification ratio* contenuti. Per formalizzare questa intuizione è possibile avanzare un'analisi più approfondita del parametro centrale sul quale si basa la logica del MDP: nel 2013 Choueifaty et al. hanno proposto un esercizio di decomposizione del *diversification ratio*, riuscendo a "spacchettare" l'indicatore in due principali componenti: *the weighted-concentration measure* e *the weighted-correlation measure.*[42]

La riformulazione del DR è la seguente:

$$DR(\boldsymbol{w}) = [\rho(\boldsymbol{w})\big(1 - CR(\boldsymbol{w})\big) + CR(\boldsymbol{w})]^{-\frac{1}{2}}$$

[42] Choueifaty et al. (2013).

Dove $\rho(\boldsymbol{w})$ è la correlazione media ponderata sulla volatilità (*volatility-weighted average correlation*) delle *asset class* contenute in portafoglio, definita come:

$$\rho(\boldsymbol{w}) = \frac{\sum_{i\neq j}(\sigma_i w_i \sigma_j w_j)\rho_{i,j}}{\sum_{i\neq j}(\sigma_i w_i \sigma_j w_j)}$$

E $CR(\boldsymbol{w})$ è il *concentration ratio* (anche identificato come *volatility-weighted concentration ratio*) pari a:

$$CR(\boldsymbol{w}) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\sigma_i w_i)^2}{\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2 w_i^2}$$

Un portafoglio costituito da una sola *asset class* presenta un $CR = 1$, mentre il minor possibile valore del CR è attribuibile al *equal volatility weighted portfolio*, ed in questo particolare caso il *concentration ratio* assume un valore pari a $1/_N$ dove N è il numero di componenti del portafoglio.
Per completezza espositiva si fa notare come il CR introduca una generalizzazione dell'indice di Herfindahl-Hischman (un indice utilizzato dall'enti governativi per misurare la concentrazione dei settori), infatti come affermato da Choueifaty et al. (2013): "[…] the CR measures not only the concentration of weights, but also the concentration of risk; assets are weighted proportionally to their volatilities."[43]
La sovraesposta decomposizione del DR dimostra come quest'ultimo aumenti quando la correlazione media ponderata sulle volatilità e/o il *concentration ratio* diminuiscono. Nel caso estremo in cui le correlazioni aumentino (per tutte le possibili coppie di *asset class*) al valore di +1 anche il DR assumerà un valore pari ad 1, indipendentemente dal valore assunto dal CR. Un'ultima riflessione che è possibile avanzare con riguardo alla decomposizione del DR riguarda il fatto che, quando tutte le coppie di *asset class* presentano gli stessi valori di correlazione, il *diversification ratio* dipende unicamente dal *concentration ratio* e massimizzare il secondo corrisponde a massimizzare il primo.[44]

È possibile calcolare il DR del MDP ottenuto precedentemente attraverso il calcolo del CR e della correlazione media ponderata sulla volatilità, pervenendo allo stesso valore pari a 1,847 ottenuto rapportando la media ponderata dei rischi e il rischio "vero" di portafoglio.

[43] "Properties of the Most Diversified Portfolio", Choueifaty et al. (2011).
[44] "Properties of the Most Diversified Portfolio", Choueifaty et al. (2011).

2.5 GMVP e MDP: quale tipo di investitore?

Le strategie del *global minimum variance portfolio* e del *maximum diversification portfolio*, pur essendo entrambe nate dall'esigenza di realizzare soluzioni di investimento indirizzate alla *risk reduction*, non devono ritenersi equivalenti dal punto di vista degli obbiettivi perseguiti. In termini generali la prima strategia è incentrata alla ricerca di un portafoglio con il minor rischio possibile relativamente all'universo investibile considerato, mentre la seconda è indirizzata alla realizzazione di un portafoglio che si considera meglio in grado di esaltare il beneficio della diversificazione.[45]
Come è stato possibile appurare nelle precedenti sezioni del presente capitolo, i tratti obbiettivamente condivisi dalle due strategie riguardando l'interesse alla *low volatily* e il fatto che esse non richiedano stime dei parametri di rendimento delle macrocategorie di investimento ai fini dell'implementazione della strategia (o, in modo alternativo ed equivalente, il fatto che esse siano *risk based strategies*).

Se si volessero tracciare i profili del tipo di investitore che potrebbe preferire una strategia piuttosto che l'altra, non sarebbe errato affermare che il GMVP sia un portafoglio costruito appositamente per rispondere alle esigenze dell'investitore più avverso al rischio. Il concetto di avversione al rischio in questo particolare caso va identificato in termini assoluti: l'investitore in questione vuole quel portafoglio che, più di ogni altra possibile alternativa ricavabile dallo stesso universo investibile, presenti il minor valore possibile di deviazione standard. Per quanto riguarda la strategia alternativa del MDP, in questo caso l'investitore tipo sarebbe rappresentato dal soggetto che intende minimizzare il rischio di portafoglio, ma che considera il concetto di "minimizzazione" non più in termini assoluti, bensì relativi. Il soggetto in questione è infatti alla ricerca di quel portafoglio che, più di ogni possibile alternativa, riesce a creare la distanza percentuale più marcata tra la media ponderata dei rischi e il rischio "vero" del portafoglio. Questo portafoglio dunque appare al servizio di colui che intende avvalersi, nella maniera più completa possibile, dei benefici derivanti dalla diversità dei componenti di portafoglio, colui che vuole sfruttare "al massimo" il beneficio della diversificazione.

Per meglio comprendere questa differenza, si immagini che un soggetto debba assumere una decisione riguardo a due alternative di *asset allocation* (definite $a.a._A$ e $a.a._B$) che presentano rispettivamente valori di rischio "vero" pari a 3% e 12% e di deviazione standard teorica (in ipotesi di matrice di correlazione contenente valori di correlazione a coppie pari a +1 per ogni

[45] "Strategie di risk reduction per i portafogli: un primo esame", Braga M.D. (2017).

elemento esterno alla diagonale principale) pari a 4% e 25%. L'investitore più avverso al rischio preferirebbe indubbiamente la prima opzione, in quanto essa presenta un valore del parametro di rischio nettamente inferiore alla seconda ($\sigma_A < \sigma_B$). L'investitore che più intende sfruttare lo "sconto" di rischio derivante dalla diversificazione di portafoglio invece preferirebbe la seconda opzione, in quanto essa presenta un *diversification ratio* maggiore della prima:

$$DR_A = \frac{4\%}{3\%} = 1{,}333$$

$$DR_B = \frac{25\%}{12\%} = 2{,}083$$

In quanto $DR_B > DR_A$.

3. APPLICAZIONE E CONFRONTO DELLE STRATEGIE GMVP E MDP

3.1 Impostazione ed implementazione della verifica empirica

L'analisi empirica oggetto di questo elaborato è stata sviluppata con l'obbiettivo di confrontare, sotto diversi punti di vista, le strategie MDP e GMVP. In particolare si procederà, dopo aver esposto le modalità con cui l'analisi è stata svolta, a valutare le due *risk based strategies* attraverso un'analisi di redditività, un'analisi di rischiosità ed infine un'analisi di *risk-adjusted performance*, in modo da poter esprimere un giudizio completo sulle stesse e sul loro comportamento durante il periodo di analisi considerato.

L'analisi è stata condotta con riferimento ad un universo investibile con respiro globale, composto da un totale di 9 *asset class* di natura eterogenea, utilizzando il foglio di calcolo Excel. Più nello specifico, sono state considerate 4 *asset class* azionarie rappresentate dai benchmark: MSCI NORTH AMERICA; MSCI PACIFIC FREE; MSCI EMERGING MARKETS; MSCI EUROPE. Poi si sono considerate 5 *asset class* obbligazionarie/di mercato monetario identificate dagli indici: BOFA ML EURO GOVT. BILL; JPM GBI EURO ALL MATS; JPM UNITED STATES GOVT.BOND; BOFA US CORPORATE INDEX; BOFA EURO CORPORATE INDEX. relative sia ad emittenti sovrani che ad emittenti corporate.

Il *data set* utilizzato consiste nelle serie storiche dei rendimenti delle *asset class* con frequenza mensile relative al periodo gennaio 1999 – dicembre 2019, per una durata totale di osservazione pari a 20 anni, consistente in 252 rendimenti mensili per ogni *asset class*. Le serie storiche oggetto dell'analisi sono rappresentative dei rendimenti prodotti dalle categorie di investimento in questione nella prospettiva di un generico investitore residente nell'area euro.

La verifica empirica è stata impostata utilizzando un metodo rolling per garantire maggiore robustezza statistica all'esperimento: è stata utilizzata una finestra rolling di stima di 60 mesi e uno spazio di calcolo dei rendimenti *out of sample* pari a 6 mesi per ciascuna finestra rolling. In questa maniera, partendo dalle iniziali 252 osservazioni mensili, è stato possibile creare un totale di 32 finestre rolling (poiché la differenza tra una finestra e la successiva è pari a 6 mensilità).

Per ogni finestra rolling di stima è stata calcolata la matrice di varianza-covarianza dei rendimenti delle 9 *asset class*, il rendimento medio aritmetico e la volatilità delle stesse.

In questo modo, operando lo strumento “solver” di Excel è stato possibile procedere all’ottimizzazione per le due strategie secondo le modalità descritte nel capitolo 2. I portafogli così ottenuti sono stati successivamente testati sulle 6 mensilità successive all’ultima mensilità considerata per il calcolo degli input necessari all’ottimizzazione; pervenendo in questo modo, per ogni finestra rolling, alla definizione dei rendimenti *out of sample* per la MDP *strategy* e per la GMVP *strategy*. I rendimenti *out of sample* così ottenuti sono stati collezionati in un distinto foglio di calcolo, che, al termine dell’esperimento, presentava i rendimenti *out of sample* per entrambe le strategie su un periodo di 192 mensilità relative al periodo gennaio 2004 – dicembre 2019.

La giustificazione razionale sulla base della quale è stato utilizzato il metodo a finestre rolling è la seguente: nel caso in cui, per condurre l’esperimento, fossero stati utilizzati come (unici) input alla costruzione dei portafogli i rendimenti mensili delle varie asset class dal gennaio 1999 al dicembre 2019, si sarebbe incorsi in un problema di incoerenza in fase di implementazione delle strategie stesse. In particolare, il lettore avrebbe potuto apprezzare uno studio nel quale i portafogli, costruiti con la finestra di 252 dati mensili, sarebbero stati testati sullo stesso periodo di osservazione (e sugli stessi identici 252 dati mensili), mostrando una più che evidente incoerenza logica sotto il punto di vista di impostazione del disegno della verifica empirica. Di contrasto, il metodo a finestre rolling garantisce un’assoluta rigidità statistica al modello in quanto, nella realtà dei fatti, sono stati condotti 32 esperimenti differenti sui portafogli: Nel “primo test” la costruzione dei portafogli è stata effettuata attingendo ad una finestra di 60 mensilità relative al periodo gennaio.1999 – dicembre.2003. I portafogli cosi costruiti sono successivamente stati “investiti” per le seguenti sei mensilità (da gennaio 2004 a giugno 2004 compreso) producendo 6 rendimenti out of sample (utilizzati a tutti gli effetti per ricostruire la dinamica dei portafogli nell’esperimento concretamente realizzato). È istantaneo notare come in questo modo il portafoglio sia stato costruito con parametri diversi da quelli sui cui successivamente è stato testato.

Il “secondo test” ha previsto che il portafoglio fosse costruito sempre attingendo ad una finestra di 60 mensilità, ma differenti da quelle utilizzate per il primo test! In questo caso il periodo considerato è stato luglio 1999 – giugno 2004 (che risulta differente dal primo periodo per uno scarto di 6 mensilità) e la composizione di asset class che ne è scaturita è poi stata “investita” per le sei mensilità che vanno dal luglio al dicembre 2004. Si noti che, essendo sia la base dati che il testing period differenti, i due esperimenti possono essere considerati differenti.

Ripetendo tale procedimento fino a testare l'ultima composizione sulle 6 mensilità luglio.2019 – dicembre 2019, sono stati ottenuti 192 rendimenti out of sample derivanti da 32 composizioni differenti, garantendo in questo modo che tali rendimenti risultino indipendenti dai rendimenti utilizzati per ottenere le composizioni stesse.

3.2 Analisi dell'output

Come anticipato nel paragrafo precedente, si procede ora ad effettuare l'analisi dell'output ottenuto in termini di:

- Redditività: attraverso il calcolo, per entrambe le strategie, della performance cumulata, del rendimento aritmetico medio (nella versione mensile ed annualizzata) e del rendimento medio geometrico (anch'esso nella versione mensile ed annualizzata).
- Rischiosità: attraverso il calcolo, per entrambe le strategie, del parametro di deviazione standard (mensile ed annualizzata), del *Downside risk,* calcolato utilizzando come MAR il rendimento *free risk* derivante dalla serie storica dei rendimenti della *proxy free risk* JPM 1 MESE CASH EUROPE (sempre relativa al periodo gennaio 2004 – dicembre 2019), ed infine attraverso il calcolo del Maximum drawdown.
- Risk-adjusted performance: che verrà disposta calcolando tre differenti tipi di indici, ed in paerticolare verrano utilizzati lo *Sharpe Ratio* (mensile ed annualizzato), il *Sortino Ratio* (mensile ed annualizzato), ed il *Omega ratio*.

Si procederà infine a commentare i risultati delle strategie attraverso l'analisi congiunta degli indicatori sopracitati, in funzione di poter esprimere delle conclusioni robuste relativamente all'esperimento effettuato.

3.2.1 Analisi dell'output: Redditività

È possibile notare come, con riferimento al periodo 01.2004 – 12.2019, il MDP abbia sovraperformato il GMVP, producendo una performance cumulata del 30,8048%, contro il 23,3526% prodotto dal portafoglio a varianza minima. Il risultato sta a significare che, investendo 100€ al 01.01.2004 nel GMVP, al termine del 2019 l'investitore avrebbe riscosso

123,3526€. Parimenti, investendo 100€ al 01.01.2004 nel MDP, al termine del 2019 l'investitore avrebbe riscosso 130,8048€.[46]

Per quanto riguarda i rendimenti medi aritmetici, il GMVP ha prodotto un rendimento medio aritmetico mensile pari a 0,109%, mentre lo stesso parametro riferito al MDP presenta un valore pari a 0,140%. Il parametro nella versione annualizzata risulta pari a 1,314% per il GMVP e 1,682% per la strategia MDP. Com'era presumibile osservando la performance cumulata dei portafogli, anche in questo caso il MDP si è rivelato più performante rispetto al GMPV: il primo è infatti riuscito a produrre un rendimento medio aritmetico, su base annuale, di 36,8 basis points superiore al secondo.

Infine, il GMVP ha prodotto un rendimento medio geometrico mensile pari a 0,1094% contro lo stesso parametro relativo al MDP pari a 0,1400%. Per quanto riguarda la versione annualizzata dell'indice, il GMVP e il MDP presentano rispettivamente valori pari a 1,3204% e 1,6925% [47].

Si può dunque affermare che il MDP abbia "battuto" il GMPV per quanto riguarda la redditività da esso mostrata nel periodo d'analisi. Tuttavia la sola valutazione delle strategie attraverso i parametri di redditività non è sufficiente: è opportuno ora indagare il profilo di rischio di entrambe le strategie per poter avanzare un'analisi di *risk-adjusted performance*, nell'ottica di comprendere quale delle due strategie sia stata maggiormente remunerativa "per ogni punto di rischio assunto".

46

$$Perf.cumulata^{GMVP}_{01.2004-12.2019} = \frac{123,3526217}{100} - 1 = 23,3526\%$$

$$Perf.cumulata^{MDP}_{01.2004-12.2019} = \frac{130,8048123}{100} - 1 = 30,8048\%$$

3.2.2 Analisi dell'output: Rischiosità

L'analisi di rischiosità si sviluppa inizialmente attraverso il confronto dei parametri di deviazione standard (sia mensile che annualizzata) di entrambe le strategie. In particolare il GMVP presenta una volatilità mensile pari a 0,144% ed una volatilità annuale pari a 0,500%. Considerando la ratio dell'algoritmo di costruzione dei due portafogli, il MDP non potrà che essere rappresentato da maggiori parametri di rischio rispetto alla prima strategia; infatti il MDP presenta una volatilità mensile pari a 0,207% ed una volatilità annuale pari al 0,717%.

Il secondo parametro utile a descrivere la rischiosità delle strategie è il Downside Risk: il Downside Risk (o Downside Deviation) è una misura che riconosce l'esistenza del rischio esclusivamente in quei periodi in cui il prodotto finanziario analizzato non riesce a raggiungere il rendimento minimo che l'autore (Frank Sortino) chiama MAR, "Minimum Acceptable Return". La formula di calcolo del Downside Risk è la seguente:

$$\text{DOWNSIDE RISK} = \sqrt{\frac{\sum_t^T [min(R_t - MAR; 0)]^2}{T}}$$

I generici termini $(R_t - MAR)$ vengono elevati al quadrato solo nel caso in cui $R_t < MAR$. Se invece $R_t > MAR$, il termine assume un valore pari a 0 (in sintesi, interessano solo gli scarti negativi dal MAR). Il Downside Risk si configura dunque come una misura di rischio asimmetrico che considera sia la gravità delle "violazioni" del MAR sia la loro frequenza (a prova di ciò, si noti che T corrisponde al numero totale dei periodi considerati).

La strategia GMVP ha prodotto un Downside Risk pari a 0,04206%, mentre la strategia MDP ha prodotto un Downside Risk pari a 0,10086%. Considerando che l'attività free risk ha prodotto un rendimento medio pari a 0,08999%, è possibile interpretare il valore del parametro ricercato nel seguente modo: con riferimento al GMVP, operando la sottrazione $(MAR - Downside\ Risk)$ si ottiene un valore pari a 0,04793%. Questo valore non è da interpretare come una misura di massima distanza dal MAR, esso indica che nelle situazioni in cui il portafoglio ha prodotto un rendimento inferiore al MAR, il rendimento ha oscillato attorno al 0,04793%. Quest'ultimo valore rappresenta quindi il punto di perno di una distribuzione gaussiana condizionata. Il punto di perno della gaussiana condizionata con riferimento al MDP risulta invece essere -0,01087%.

Si noti come, nel caso della strategia GMVP, le violazioni del MAR hanno oscillato attorno ad un parametro di rendimento maggiore di zero. Mentre nel caso in cui si consideri la strategia MDP si può notare come il relativamente elevato valore del downside risk, una volta confrontato al MAR, spieghi come il portafoglio nei periodi "di stress" abbia spesso prodotto dei rendimenti negativi, in quanto per definizione essi hanno oscillato attorno ad un numero negativo (-0,01089%).

L'ultima misura di rischio che si intende considerare è il Maximum Drawdown. In un generico istante t, per drawdown si intende la caduta (se esistente) che è possibile riconoscere osservando il valore del montante del portafoglio (o più in generale di un generico investimento) a confronto con il suo precedente valore massimo fino a quell'istante. Il Maximum Drawdown è il valore massimo osservabile del Drawdown nel periodo di osservazione considerato, esso esprime dunque in termini percentuali la più marcata erosione di ricchezza che il portafoglio ha sperimentato. Il Drawdown al tempo t è pari a:

$$\mathrm{DRAWDOWN_t} = \min\left[\frac{\mathrm{Montante_t}}{\max(\mathrm{Montante_{0\ldots t}})} - 1; 0\right]$$

Nel caso in cui l'equazione sovraesposta presentasse valori diversi da 0 (in particolare minori), questo sarebbe rappresentativo di una situazione nella quale il montante dell'investimento risulterebbe inferiore rispetto ad un montante massimo precedentemente raggiunto.

Il Maximum Drawdown è una metrica particolarmente significativa in quanto essa accoglie un modo di concepire le perdite tipico della psicologia dell'investitore: secondo questa misura non è perdita la mera compromissione del capitale investito, ma è da considerarsi come perdita anche l'erosione di una ricchezza che, agli occhi dell'investitore, sembrava già acquisita. Le misure di Drawdown permettono dunque di testare la reazione dell'investitore di fronte alla "prova di stress" rappresentata dalla peggiore caduta manifestata dal proprio investimento.

Durante il periodo di tempo oggetto di analisi, la GMVP strategy ha sperimentato un Maximum Drawdown pari a -1,45928%, mentre la MDP strategy ha generato un valore della stessa metrica pari a -1.50895%.

Sotto un punto di vista qualitativo, le due strategie non sembrano essere in grado di mettere l'investitore sotto una forte prova di stress. Infatti, valori che si aggirano attorno al -1.5% non possono essere rappresentativi di una forte condizione di stress per l'investitore in questione che, si può affermare, non abbia osservato preoccupanti crolli di valore del portafoglio per l'intero periodo di analisi.

3.2.3 Analisi dell'output: Risk-adjusted performance

Le misure di *risk-adjusted* performance sono una serie di indicatori che sintetizzano in un solo indice sia una misura di rischio che una misura di rendimento. Il ruolo delle misure RAP è quello di esplicitare una misura di rendimento rettificata per il livello di rischio che è stato sopportato per raggiungere il risultato in termini di rendimento.
Per analizzare in maniera esaustiva il profilo di rendimento corretto per il rischio delle due strategie verranno utilizzati tre indicatori differenti: Sharpe Ratio, Sortino Ratio ed Omega Ratio.

L'indice di Sharpe appartiene, assieme all'indice di Sortino, al novero degli "indicatori di efficienza assoluta", esso permette di comprendere quanto lo strumento è riuscito a remunerare, in eccesso ad un'attività *free risk*, ogni punto di rischio (volatilità) assunto. Algebricamente:

$$IS_{fondo} = \frac{\bar{R}_{fondo} - \bar{R}_{free\ risk}}{\sigma_{fondo}}$$

Sempre considerando la serie storica dei rendimenti dell'asset class JPM 1 MESE CASH EUROPE come *proxy free risk*, è stato calcolato lo SR per entrambe le strategie[48].

Cominciando la trattazione secondo i dati mensili, il GMVP presenta un'indice di Sharpe di valore pari a 0,1349, mentre lo stesso valore riferito al MDP ammonta a 0,2423. Per quanto riguarda la corrispondende versione annualizzata, la prima strategia ha prodotto uno SR pari a 0,4673 mentre per la seconda lo stesso indicatore ammonta a 0,8394.

Il risultato ottenuto in termini annualizzati va interpretato nel seguente modo: la strategia GMVP, per ogni punto percentuale di deviazione standard, ha prodotto una remunerazione aggiuntiva di circa 47 basis points rispetto a quanto si sarebbe conseguito investendo in un'attività free risk. Per contro, la strategia MDP ha prodotto risultati decisamente migliori in termini di *risk-adjusted* performance, producendo per ogni punto di volatilità un rendimento di

[48] È necessario far presente che la proxy free risk citata ha prodotto un rendimento (aritmetico) medio annualizzato pari a 1,080%.

circa 84 basis points superiore a quello prodotto dall'attività risk free. Lo stesso ragionamento vale nel caso di dati mensili, aggiustando i rispettivi valori**.**

Il secondo indice di efficienza assoluta che si vuole considerare è il Sortino Ratio: esso fonda il calcolo su una logica simile a quella dello Sharpe Ratio, ma se ne differenzia in quanto l'*excess return* rispetto all'attività risk free viene frazionato per la misura di Downside Risk. Algebricamente il Sortino Ratio si presenta nel seguente modo:

$$Indice\ di\ Sortino = \frac{\bar{R}_{fondo} - MAR}{Downside\ risk}$$

Per costruzione, è intuitivo comprendere come un Sortino Ratio negativo possa essere maggiormente indesiderabile rispetto ad uno Sharpe Ratio negativo in quanto la misura di rischio considerata è alimentata per definizione da "situazioni sgradevoli". L'indice riesce ad esprimere la misura in cui un rischio, per definizione sgradevole, sia stato sopportato "a fin di bene" o meno.

La logica che ha portato alla costruzione di tale indicatore è quella secondo la quale nella valutazione risk-adjusted di una qualunque attività finanziaria, gli excess return positivi possano essere "trascurati" a favore di un'analisi più approfondita della misura in cui il rendimento dell'investimento sia stato adeguato rispetto alla media delle deviazioni negative da quest'ultimo. In particolare, maggiore è il valore assunto dall'Indice di Sortino, maggiore sarà la remunerazione derivante dall'investimento rispetto al rischio a cui esso espone l'investitore.

In questi termini la migliore strategia risulta essere, seppur con esiguo scarto, la MDP strategy: essa ha prodotto un Sortino Ratio mensile pari a 0,498 (rispetto alla medesima versione riferita alla strategia GMVP, che ammonta a 0,463) ed un Sortino Ratio annuale pari a 1,723 (lo stesso indicatore per il GMVP è invece pari a 1.604).

Il terzo ed ultimo indicatore di risk-adjusted performance è l'Omega Ratio. Esso fu ideato da Keating e Shadwick nel 2002 ed è definito come il rapporto di probabilità ponderato tra excess return positivi ed excess return negativi, rispetto al MAR di riferimento. Per calcolare questo rapporto è necessario fare ricorso alla funzione di densità dei rendimenti dei portafogli da analizzare, al fine di implementare un calcolo integrale sulla stessa per determinare l'area sottesa dalla curva di distribuzione di probabilità sopra e sotto il MAR. In particolare l'area sotto il MAR rappresenta la somma delle perdite, mentre quella superiore al MAR rappresenta, per differenza, quella dei guadagni. La definizione dell'Omega Ratio è la seguente:

$$\Omega(MAR) = \frac{\int_{MAR}^{\infty}[1 - F(x)]dx}{\int_{-\infty}^{MAR} F(x)dx}$$

Leggendo tale formula in termini diversi, l'Omega Ratio è in grado di fornire un rapporto tra il numero di "situazioni" in cui il portafoglio ha sovraperformato il MAR e il numero di "situazioni" in cui esso ha sottoperformato il MAR.

$\Omega(MAR) = 1$ è un risultato rappresentativo della situazione in cui le oscillazioni in positivo e le oscillazioni in negativo si sono equivalse; mentre $\Omega(MAR) > 1$ significa che la probabilità di ottenere rendimenti maggiori rispetto al MAR è superiore alla probabilità di averne di inferiori.

Tornando all'analisi empirica, è possibile affermare che entrambe le strategie presentano masse di probabilità maggiori per gli excess return positivi e, tra loro, quasi identiche: l'Omega Ratio risulta essere pari a 2.251 per la strategia GMVP mentre risulta pari a 2.267 per la strategia alternativa MDP.

Si riepilogano i valori degli indici di cui si è discusso nel presente capitolo nelle seguenti tabelle:

Tabella 3.1.: Analisi di redditività – Output

	GMVP	MDP
Performance cumulata	23,3526%	30,8048%
Rendimento medio aritmetico (annuo)	1,3137%	1,6821%
Rendimento medio geometrico (annuo)	1,3204%	1,6925%

Tabella 3.2.: Analisi di rischiosità – Output

	GMVP	MDP
Deviazione standard (annualizzata)	0,5002%	0,7173%
Downside risk	0,0421%	0,1009%
Maximum Drawdown	-1,4593%	-1,5090%

Tabella 3.3.: Analisi di risk-adjusted performance – Output

	GMVP	MDP
Sharpe Ratio (annuo)	0,4673	0,8394
Sortino Ratio (annuo)	1,6044	1,7235
Omega Ratio	2,2513	2,2673

CONCLUSIONE

Alla luce dei risultati ottenuti attraverso la costruzione degli indici di sintesi di cui si è brevemente discusso nel capitolo 3, è possibile trarre alcune considerazioni conclusive sul lavoro svolto, che inquadrano il comportamento delle strategie con riferimento all'esperimento effettuato e in parte "confermano" le attese nei confronti di queste.

Considerando in prima battuta un confronto tra il profilo di rendimento della GMVP strategy e della strategia MDP, è immediato notare come quest'ultima abbia sotto tutti i punti di vista condotto a risultati migliori rispetto alla prima. La MDP ha sovraperformato la GMPV durante l'intero periodo d'analisi in termini di performance cumulata (30,80% per il MDP; 23,35% per il GMVP), di rendimento geometrico medio (1,69% contro 1,32%, dati annualizzati) e di rendimento aritmetico medio (1,68% contro 1,31%, dati annualizzati). I contenuti valori di rendimento delle strategie evidenziano subito la natura *risk-averse* delle stesse e ciò viene confermato dalle prossime considerazioni, che si riferiscono ai valori assunti dai parametri di rischio computati.

Il valore della volatilità annualizzata risulta essere pari a 0,72% per il MDP e 0,50% per il GMVP. Com'è semplice intendere se si riflette sul significato finanziario del GMVP, esso ha prodotto la combinazione di asset class con la minore volatilità possibile riferita all'universo investibile utilizzato. Il MDP ha prodotto un rendimento maggiore "al prezzo" di una volatilità del 44% superiore a quella che ha caratterizzato il GMVP, e questo concetto è posto in evidenza anche dagli altri indicatori di rischio: il downside risk mensile è pari a 0,04% per la strategia a varianza minima, mentre per la strategia che pone come obbiettivo la massimizzazione del DR il valore del parametro ammonta a 0,10%. È immediato notare come nelle situazioni di violazione del *minimum acceptable return*, il GMVP abbia comunque garantito un rendimento positivo, che ha oscillato attorno al 0,05%, mentre la seconda strategia ha condotto ad un punto di perno della gaussiana subordinata negativo, con corrispondente altà probabilità di misurare rendimenti negativi da parte del portafoglio. Considerando l'aspetto di "stress" sopportato dall'investitore durante il periodo di analisi, si può affermare che entrambe le strategie abbiano compiuto un buon lavoro: il maximum drawdown si aggira in entrambi i casi sul valore di -1,5% (risulta leggermente minore per la GMVP). Si noti che il periodo analizzato ingloba alcuni periodi tristemente noti per aver generato enormi crolli dei valori di mercato dei titoli quotati (quali la "bolla dot com" e la crisi degli stati sovrani del 2007/2008). In quest'ottica si può concludere che le strategie avrebbero proposto un’ottima soluzione di *hedging* contro l’instabilità caratterizzante queste singolari situazioni.

In ultima battuta, l’analisi degli indicatori di rendimento corretto per il rischio consente di racchiudere in pochi parametri di sintesi gli aspetti fin qui discussi, permettendo di avanzare un giudizio comparativo sulle strategie con riferimento alla tipologia di investitore a cui esse più si indirizzano. Viene evidenziato in particolare che il diverso atteggiamento dei portafogli nei confronti del rischio (da un lato secondo un principio di minimizzazione assoluta dello stesso, dall’altro lavorando su di esso in termini relativi, massimizzando il beneficio derivante dalla diversificazione di portafoglio) rende le stesse più adatte a profili diversi di investitore: la GMVP strategy si conferma come strategia più difensiva, maggiormemnte adatta all’investitore avverso al rischio in termini assoluti, mentre la MDP strategy esprime al contrario un carattere più audace. Infatti, lavorando sul rischio in termini di beneficio della diversificazione, la strategia MDP riesce a produrre un premio al rischio superiore rispetto alla comparata GMVP, e ciò è evidente in maniera palese nei casi dello Sharpe e del Sortino Ratio. Osservando proprio quest’ultimo, la strategia MDP ha sovraperformato la GMVP in termini di rendimento corretto per il rischio: 1,723 è il valore computato nel primo caso, contro un valore pari a 1,604 per la strategia a varianza minima. È bene notare come la MDP strategy ottenga un valore più elevato seppur essa dipenda da un downside risk che quasi triplica quello dell’alternativa GMVP, e ciò è attribuibile alla maggiore performance prodotta dalla strategia più diversificante. Questo concetto è reso ancora più evidente osservando l’Indice di Sharpe: la ricerca della maggiore diversificazione e della più elevata efficienza finanziaria promossa dal MDP ha consentito ad esso di quasi raddoppiare il GMVP in termini di *risk-adjusted performance*, producendo un valore pari a 0,839 contro il 0,467 prodotto dalla seconda. L’abbattimento del rischio in termini relativi è risultato essere dunque più remunerante rispetto alla minimizzazione dello stesso in termini assoluti. Infine, sebbene le due strategie risultino in valori dell’Omega Ratio molto simili, ed in particolare 2,267 per la MDP e 2,251 per la GMVP, osservando meglio le componenti dell’indicatore è possibile trarre una considerazione aggiuntiva: concentrandosi in particolare sul numeratore, che risulta essere in un caso 0,035% (GMVP) e nell’altro 0,09% (MDP), si intuisce che, in media, la frequenza e l’entità dei rendimenti superiori al MAR per il MDP è nettamente superiore alla frequenza e all’entità degli stessi rendimenti per il GMVP. Tuttavia, in maniera algebricamente speculare, anche il denominatore dell’Omega Ratio risulta superiore per il MDP, registrando un valore pari a 0,04% contro il minor valore assunto dalla stessa componente dell’indice nel caso del GMVP, pari a 0,016%. Questi risultati indicano che il MDP ha presentato, in media, rendimenti nettamente inferiori al MAR per entità e frequenza rispetto a quelli registrati per il GMVP nelle stesse situazioni di violazione del valore soglia.

Le strategie considerate, rientranti nel novero delle μ-free strategies, hanno confermato il carattere poco volatile e conservativo tipico della famiglia a cui appartengono. Tuttavia, l'esperimento ha fatto emergere un differente orientamento delle due, dettato dal diverso approccio al rischio di cui esse si fanno portavoce. L'orientamento alla minimizzazione del rischio in termini relativi ha condotto ad un portafoglio in grado di massimizzare la remunerazione del rischio di cui esso si fa carico. L'avversione totale al rischio ha generato una combinazione di asset che ha risentito in maniera estremamente marginale dell'incertezza caratterizzante i mercati, conducendo a performance strattamente positive in quasi tutti gli scenari considerati e garantendo la massima stabilità del patrimonio investito.

Bibliografia:

- Bacon C.: "*Practical Risk-Adjusted Performance Measurement*", Wiley, Chichester, 2013.
- Bailey J., Richards T., Tierney D.: "Evaluating Portfolio Performance", *Managing Investment Portfolios. A dynamic Process,* a cura di Maginn. L., Tuttle D.L. McLeavey D.W., Pinto J.E., 3rd edition, Wiley, Hoboken, 2007.
- Basile I., Braga M.D., Ferrari P.: "Asset Management e Investitori Istituzionali", *Seconda edizione,* Pearson, 2019.
- Best M., Grauer R.: "On the Sensitivity of Mean Variance Efficient Portfolios to Changes in Assets Means. Some Analytical and Computational Results", *The Review of Financial Studies*, v. 4, n. 2, 1991.
- Black F., Litterman R.: "Global Asset Allocation with Equities, Bons and Currencies", *Fixed Income Research*, Goldman Sachs, October, 1991.
- Braga M.D: "Mean-Variance Efficiency: da Markowitz a... oggi", in L*'innovazione finanziaria – Osservatorio Newfin 2004 – Corporate, investment e retail banking. Gestione del risparmio, mercati finanziari e previdenza,* a cura di Anderloni L., Bancaria Editrice, Roma, 2004.
- Braga M.D: *Il risk budgeting nell'asset management. Strumenti e tecniche per la misurazione, scomposizione e allocazione del rischio,* Bancaria Editrice, Roma, 2008.
- Braga M.D: "Risk Parity versus Other μ-free Strategies: A Comparison in a Triple View", *Investment Management and Financial Innovations,* v.12, n.2, 2015.
- Braga M.D: "*Risk-Based Approaches to Asset Allocation. Concepts and Practical Applications*", Springer, Heidelberg, 2016.
- Braga M.D: "Strategie di risk reduction per i portafogli: un primo esame", *Bancaria*, n. 7-8, 2017.
- Ceria. S., Stubbs R.A.: "Incorporating Estimation Errors into Portfolio Selection: Robust Portfolio Construction", *Journal of Asset Management,* vol. 7, n. 2, 2006.
- Choueifaty Y., Coignard Y.: "Toward Maximum Diversification", *The Journal of Portfolio Management,* v. 35, n. 1, 2008.
- Choueifaty Y., Froidure T., Reynier J.: "Properties of The Most Diversified Portfolio", *Journal of Investment Strategies*, 2013.

- Chopra V.K., Ziemba W.T.: "The Effects of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice", *Journal of Portfolio Management,* v. 19, n. 2, 1993.
- Clarke R., De Silva H., Thorley S.: "Minimum-Variance Portfolio Composition", *The Journal of Portfolio Management* ,2011
- Fabozzi F.J., Kolm P.N., Pachamanova D.A., Focardi S.M: "*Robust Portfolio Optimization and Management"*, Wiley, Hoboken, 2007.
- Frankfurter G.M, Phillips H.E., Seagle J.P.: "Portfolio Selection: The Effects of Uncertain Means, Variances and Covariances", *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* v. 6, n. 5, 1971.
- Harvey C.R., Siddique A.: "Conditional Skewness in Asset Pricing Tests", *Journal of Finance*, 2000.
- Jobson J.D., Korkie B.: "Estimation for Markowitz Efficient Portfolios", *Journal of the American Statistical Association,* v. 75, n. 371, 1980.
- Jondeau E., Rockinger M.: "Optimal Portfolio Allocation Under Higher Moments", *European Financial Management,* v. 12, n. 1, 2006.
- Jorion P.: "Portfolio Optimization in Practice", *Financial Analysts Journal,* v. 15, n. 1, 1992.
- Kraus, A., Litzenberger, R.: "Skewness Preference and the Valuation of Risky Assets", *Journal of Finance*, 1976.
- Maillet B., Tokpavi S., Vaucher B.: "Global Minimum Variance Portfolio Optimisation under some Model Risk: A Robust Regression-based Approach", *European Journal of Operational Research,* 2015.
- Mardia K.W.: "Measures of Multivariate Skewness and Kurtosis with Applications", Biometrica, v. 57, n. 3, 1970.
- Markowitz H.M.: "Portfolio Selection*", Journal of Finance*, v.7, n. 1, 1952.
- Markowitz H.M.: "*Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments",* Wiley, New York, 1959.
- Markowitz H.M.: "*Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets",* Blackwell, Oxford, 1987.
- Michaud R.O.: "The Markowitz Optimization Enigma: Is 'Optimized' Optimal?", *Financial Analysts Journal,* v.45, n.1, 1989.

- Mitton T., Vorkink K.: “Equilibrium under Diversification and the Preference for Skewness”, *Review of Financial Studies*, 2007.
- Modigliani F., Modigliani L.: “Risk-Adjusted Performance”, *The Journal of Portfolio Management,* v. 23, n. 2, 1997.
- Pratt J.W.: “Risk Aversion in the Small and in the Large”, *Econometrica*, v. 32, n. 1/2, 1964.
- Saita F.: “Le strategie di gestione dei portafogli azionari e obbligazionari” in *Economia del Mercato Mobiliare,* a cura di Fabrizi P.L, 6ª edizione, Egea, Milano, 2016.
- Scherer B.: “Portfolio Construction and Risk Budgeting”, 5th edition, Risk Books, London, 2015.
- Scott R.C., Horwath P.A.: “On the Direction of Preference for Moments of Higher Order than the Variance”, *Journal of Finance*, v. 35, n. 4, 1980.
- Sharpe W.: “The Sharpe Ratio”, *The Journal of Portfolio Management,* v. 21, n. 1, 1994.
- Sortino F., Van Der Meer R.: “Downside Risk”, *The Journal of Portfolio Management,* v. 17, n. 4, 1991.