UNIVERSITÀ DELLA VALLE D'AOSTA
UNIVERSITÉ DE LA VALLÉE D'AOSTE

DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE E POLITICHE

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE DELL'ECONOMIA E DELLA GESTIONE AZIENDALE

ANNO ACCADEMICO 2023-2024

TESI DI LAUREA

L'impossibilità di una decisione collettiva equa: un'analisi dei meccanismi politici attraverso la teoria delle decisioni

DOCENTE 1° relatore: Prof. NIRINO Niccolò

DOCENTE 2° relatore: Prof. LOMBARDO Mario

STUDENTESSA: PERCALI Giulia

MATRICOLA: 21 C05 813

Indice

Introduzione

L'obiettivo di questa ricerca è quello di comprendere i processi decisionali in ambito politico attraverso l'utilizzo di alcuni modelli econometrici.

La scienza delle decisioni è una branca vastissima dell'economia che difficilmente si può riassumere in una definizione. Lo scopo delle prossime righe è quello di dare un'idea il più completa possibile di questa disciplina.

Innanzitutto, la teoria delle decisioni studia come alcuni attori, gli agenti, prendono o come dovrebbero prendere delle decisioni[1]. Si tratta di una disciplina che ha appassionato studiosi e filosofi fin dall'Antica Grecia, ma solo molto più tardi ha assunto un carattere scientifico.

Finché era parte della filosofia, la questione della scelta era strettamente collegata alla morale; verrà analizzato un solo esempio per capire la differenza di approccio tra un filosofo e un matematico. Un filosofo come Kant[2], nell'affrontare il tema della scelta, ricercava una regola comportamentale che tutti seguissero. Trova risposta in quello che ha chiamato "imperativo categorico": quel pensiero che fa agire le persone nel modo in cui esse vorrebbero che gli altri si comportassero nei loro confronti.

Un libro che lessi durante la pandemia e che mi segnò profondamente è *L'insostenibile leggerezza dell'essere*[3]. In quest'opera viene trattata in maniera emblematica la questione delle scelte; a partire dal titolo si va a sottolineare la leggerezza riguardo ogni scelta che viene presa; infatti, dopo aver optato per un'opzione piuttosto che un'altra, non avremo mai modo di tornare indietro e verificare che quella fosse la più vantaggiosa. In questo modo, ogni ragionamento e conseguente scelta diventa insignificante. Secondo l'autore, proprio questa leggerezza diventa insostenibile nel momento in cui ci si rende conto che non ha senso una vita in cui nessuna scelta ha importanza. Ed ecco spiegato il motivo del titolo e tema centrale del capolavoro di Kundera.

Questo libro mi lasciò un po' con l'amaro in bocca; infatti, erano più gli interrogativi che mi aveva suscitato, rispetto alle risposte che avevo ottenuto. Ed ecco perché questo elaborato cercherà di seguire un approccio scientifico, senza avere però la pretesa di dare risposte a nessuno.

Una prima precisazione importante da fare riguarda la differenza tra due concetti interconnessi: scelta e decisione. Una scelta è fatta di opzioni ed è definita come "quel momento, di solito ben

---

[1] S. Bacci e B. Chiandotto, *Statistica per le decisioni* cit., pag.1
[2] I. Kant, *Critica della ragion pratica*
[3] M. Kundera, *L'insostenibile leggerezza dell'essere (1984)*

identificabile nello spazio e nel tempo, in cui optiamo per un'alternativa o l'altra"[4]. Mentre la scelta è quindi identificabile come quel momento finale in cui si arriva alla resa dei conti - scegliere tra A e B-, la decisione è quel processo implicito che si trova a monte. Secondo questa logica, dietro ogni scelta c'è un percorso decisionale, ad esempio, nel marketing viene definito *purchase funnel* quel concetto che fa riferimento ai ragionamenti seguiti dal consumatore per valutare un acquisto.

Al fine di migliorare le decisioni degli agenti, la teoria delle decisioni si occupa di valutare le alternative, e lo fa utilizzando diversi metodi. Un primo metodo, che andremo ad analizzare meglio nel primo capitolo, sfrutta il concetto di valore atteso, introdotto da Pascal nel XVII secolo.

Ancora riguardo la teoria delle decisioni, questa, come ogni dignitosa disciplina, può essere distinta in diversi filoni: in particolare, in base allo scopo che si vuole raggiungere e con che modalità, la si può dividere in teoria normativa e descrittiva. La prima vuole cogliere i ragionamenti che portano le persone ad assumere determinate decisioni. Mentre la seconda si pone l'obiettivo di trovare costrutti - o come direbbe un matematico - assiomi che, in contesti operativi, tutti i decisori rispettano e che assicurano di massimizzare il proprio benessere. Un'altra importante distinzione è quella tra decisioni individuali e collettive. La regola dice che si parla di decisioni di gruppo quando gli individui che appartengono alla stessa organizzazione manifestano opinioni diverse rispetto ai fini o alle priorità del gruppo[5]. Sapendo questo, è facile dedurre che saranno considerate decisioni individuali non solo quelle del singolo individuo, ma anche tutte quelle in cui più decisori condividono obiettivi comuni.

Questa tesi applicherà la parte descrittiva della teoria delle decisioni alla collettività; in particolare andrà a indagare riguardo ai modi in cui si possono unire le preferenze di tanti individui in un unico pensiero, per poi studiare la più logica forma di aggregazione di preferenze: i sistemi elettorali. Riguardo entrambi i temi i risultati saranno molto interessanti e imprevedibili.

Evidentemente, per far ciò, bisogna prima partire da un punto di vista individuale e poi analizzare come gli interessi dei singoli vengano raggruppati in contesti collettivi, e questo è quello di cui si occuperà il primo capitolo.

[4] F. Pozzi, *Digital nudge* cit., cap. 2.1
[5] S. Bacci e B. Chiandotto, *Statistica per le decisioni* cit., pag.2

Il secondo ci porrà di fronte al più grosso problema delle decisioni collettive: l'impossibilità di aggregare in modo equo le preferenze degli individui, con le relative conseguenze e le applicazioni nell'economia.
Infine, nel terzo capitolo, ci si occuperà di analizzare la storia degli Stati Uniti d'America in relazione alle leggi elettorali; saranno incorporate nel capitolo delle analisi realizzate dalla sottoscritta utilizzando i dati originali, riguardanti i metodi adottati e le problematiche riscontrate.
Prima di partire con la tesi vera e propria, verranno dedicate ancora un paio di righe alle decisioni collettive in termini più economici e meno politici. Infatti, è stato detto che la teoria delle decisioni utilizza modelli economici applicandoli principalmente alla politica, ma non solo.
Come allocare risorse tra settori come la sanità, l'istruzione o la difesa, quali investimenti fare in tecnologie, come affrontare le crisi con pacchetti di aiuto o politiche sociali sono tutte scelte di tipo collettivo che coinvolgono l'economia.
Se il concetto di economia si può riassumere come l'allocazione di una scarsità di risorse tra differenti usi alternativi, quello delle scelte collettive applicato all'economia prenderà un po' più di spazio.
Gli elementi da definire quando si tratta questo tema sono in primo luogo i partecipanti; è evidente che si intende l'insieme degli individui di un gruppo che si riuniscono per prendere decisioni di interesse comune. Nell'ambito economico, si tratta di aziende, organizzazioni no-profit, il governo, gli investitori.
Esistono poi differenti modalità tra cui scegliere per prendere decisioni; si può decidere di lasciare tutto il potere in mano ad una sola persona come nelle dittature, che spesso però non sono ben viste, oppure le persone, in circostanze particolari, ad esempio quando si rivolgono a degli esperti, preferiscono che le decisioni vengano prese da chi è competente in quella materia. Ovviamente in base a quale metodo si sceglie i risultati saranno diversi. Le dittature tendenzialmente falliscono, mentre affidarsi ad un professionista finanziario a cui fare gestire i propri investimenti, in linea di massima, è produttivo.
L'ultimo elemento da considerare rimangono i criteri di scelta. Quando si tratta il tema delle scelte sociali[6] è difficile trovare dei criteri per cui siamo più propensi per una scelta: pensiamo ad un esempio in cui bisogna decidere se riempire una fossa creata da un cantiere edile per trasformarla in un parco. In generale, tutti sono d'accordo con l'idea che costruire un parco

[6] Le scelte sociali fanno riferimento a decisioni collettive che riguardano la società nel suo complesso.

porti benefici alla società; che sia per i bambini che possono giocarci, per gli alberi che rilasciano ossigeno o per evitare che qualcuno ci cada dentro[7]. Ed è proprio questa la difficoltà delle scelte collettive; possiamo anche condividere una scelta, ma ognuno avrà una motivazione diversa.

Tuttavia, gli economisti sono andati alla ricerca di criteri oggettivi condivisibili per prendere decisioni; hanno trovato una risposta nei concetti di efficienza economica e di equità.

Se si pensa ad una torta come l'intera economia, l'efficienza economica sarà rappresentata dalla grandezza della torta, mentre l'equità fa riferimento a come viene divisa tra i membri della società. Gli economisti hanno il compito di consigliare la politica e nel farlo devono tenere in considerazione questi due concetti e prestare molta attenzione in quei casi in cui efficienza ed equità vanno in direzioni opposte.

Come è ovvio che sia, quando parleremo di teoria delle decisioni collettive, vedremo che il confine tra economia e politica è confuso e sottile; utilizzeremo modelli economici e matematici per capire processi politici che, a loro volta, spiegano concetti economici.

Concludendo, un economista non fa affidamento all'etica, ma va alla ricerca di una formula che permetta di massimizzare gli interessi del decisore in modo oggettivo e innegabile.

La filosofia e tutto ciò che c'è di psicologico nella teoria delle decisioni in questa tesi verranno tralasciati per concentrarsi unicamente su ciò che di scientifico è stato studiato e ideato dagli economisti e dai matematici.

Spetterà poi ad ognuno di noi decidere come trattare la vita: se come un compito di matematica, dove ogni problema ha una risposta esatta, a condizione che siamo in grado di trovarla, o se la si preferisce pensare come la tela di un pittore, sulla quale si può liberamente creare qualunque dipinto e dove l'unico limite è rappresentato dalla fantasia.

[7] Riferimento alla serie televisiva "Parks and Recreation" (Greg Daniels e Michael Schur)

Capitolo uno
Statistica per le decisioni

1.1 Teoria del valore

La statistica si occupa di raccogliere e trasformare i dati in informazioni; se queste ultime vengono utilizzate per prendere decisioni, allora si parla di statistica per le decisioni.
La statistica per le decisioni, quindi, in modo intuibile, mette insieme la statistica e la teoria delle decisioni. Le prime basi di questa disciplina sono poste da Pascal[8] già nel XVII secolo, quando affrontò il problema che riguarda la esistenza o la non-esistenza di Dio. Il matematico pensò di trattare questo dilemma come una scommessa e assegnò una ricompensa infinita alla decisione di credere, secondo il ragionamento che, credendo, si può ottenere la vita eterna pagando un costo relativamente piccolo. In questo modo, introduce il concetto fondamentale di valore atteso.
Per capire ancora meglio cosa si intende con valore atteso, si può costruire un ragionamento a partire dal paradosso di San Pietroburgo. Questo fu annunciato da Bernoulli nel 1738[9] e viene ricordato con questo nome perché prendeva in considerazione giochi di azzardo che si svolgevano in un casinò di San Pietroburgo.
Il paradosso nasce nel momento in cui si vuole individuare quale prezzo viene considerato equo per partecipare ad una lotteria in cui il giocatore ha la possibilità di lanciare una monetina da un euro; ogni volta che esce testa il giocatore raddoppia la propria vincita e la prima volta che esce croce finisce il gioco e il montepremi che ha guadagnato fino a quel momento non va perduto. Quindi, se al primo lancio esce testa, l'euro iniziale raddoppia e continua a farlo finché non esce croce; supponendo che questo accada al terzo lancio, il giocatore avrà vinto otto euro.
Il valore atteso, che si ottiene moltiplicando la vincita per la probabilità che l'evento accada, misura una stima della ricompensa che la lotteria restituirà.
Nel caso di San Pietroburgo, attraverso questo calcolo, si ottiene come risultato infinito; questo implica che si dovrebbe essere disposti a pagare un'infinita quantità di soldi pur di partecipare al gioco. La logica di questo risultato è che, avendo la possibilità di partecipare infinite volte, ci sarà per forza una lotteria in cui si vince un valore talmente alto da coprire tutte le perdite fino a quel momento accumulate.

---

[8] B. Pascal (1623-1662): matematici, fisico e filosofo, ricordato per innumerevoli studi, tra cui quelli sui fluidi, quelli probabilistici.
[9] D. Bernoulli (1700-1782), *Esposizione di una nuova teoria sulla misurazione del rischio*

Il paradosso consiste proprio in questa dissonanza tra il potenziale di vincita, infinito, e quanto le persone sono effettivamente disposte a pagare: cifre molto basse.

$$\mathrm{VA} = 2 * \frac{1}{2} + 4 * \frac{1}{4} + 8 * \frac{1}{8} + 16 * \frac{1}{16} + \cdots$$
$$= \sum_{1}^{\infty} 1 = \infty$$

Bernoulli[10] risolve il problema introducendo quella che definisce "funzione di utilità", che varia a seconda della propensione al rischio dell'individuo. Calcolando l'utilità del gioco di San Pietroburgo, il risultato non è più infinito, e questo è in linea con l'evidenza riscontrata dai partecipanti ed esclude, quindi, la natura paradossale che aveva assunto il gioco.

Bernoulli suppone un giocatore avverso al rischio con $\mathrm{u(x)} = \log_2 \mathrm{x}$. Supponendo un gioco che finisce a k-esimo lancio:

$$\mathrm{u}\left(2^{\mathrm{k}}\right) = \log_2\left(2^{\mathrm{k}}\right) = \mathrm{k}$$

L'utilità si ottiene, in modo analogo al valore atteso, moltiplicando la funzione di utilità per la probabilità che l'evento accada:

$$\mathrm{UA} = \log_2(2) * \frac{1}{2} + \log_2(2^2) * \frac{1}{2^2} + \log_2(2^3) * \frac{1}{2^3} + \cdots + \log_2\left(2^{\mathrm{k}}\right) * \frac{1}{2^{\mathrm{k}}} + \cdots =$$
$$= 1 * \frac{1}{2} + 2 * \frac{1}{2^2} + 3 * \frac{1}{2^3} + \cdots + \mathrm{k} * \frac{1}{2^{\mathrm{k}}} + \cdots$$

Questa somma di valore prende il nome di serie e, nonostante l'apparenza, dà come risultato un valore finito. Una somma di infiniti valori che ha per risultato un numero reale viene definita convergente.

Si può dimostrare che questa serie ha somma due:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log_2(2^n)}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

Per risolvere il paradosso, Bernoulli ha utilizzato la funzione logaritmica, ma avrebbe potuto usarne anche altre; l'importante è considerare una funzione crescente, perché l'utilità di un bene aumenta all'aumentare della disponibilità.

[10] Nella famiglia svizzera dei Bernoulli si contano almeno otto matematici, in questo caso parliamo di Nicolaus I Bernoulli

1.2 Criteri decisionali in situazioni di estrema incertezza

Andremo ora ad analizzare alcuni criteri utilizzati dagli agenti per prendere decisioni in casi di estrema incertezza. La differenza tra decisioni in situazioni di rischio e di incertezza è fondamentale per la scienza delle decisioni: la prima implica che si disponga di una misura delle probabilità dei diversi stati, mentre la seconda no.

Consideriamo con $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ l'insieme delle azioni e con $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ l'insieme dei possibili stati, cioè le situazioni che possono verificarsi. Le conseguenze, che qui esprimiamo in termini monetari, saranno una funzione dell'azione a_i e dello stato θ_i.

$$y_{ij} = f(a_i, \theta_j) \qquad \text{per } i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$$

La *tabella 1.1* riporta i simboli y_{ij} che rappresentano le conseguenze delle azioni in termini monetari e si vede come questi dipendono dallo stato di natura Θ e dalle azioni A.

A \ Θ	θ_1	θ_2	…	θ_n
a_1	y_{11}	y_{12}	…	y_{1n}
a_2	y_{21}	y_{22}	…	y_{2n}
…	…	…	…	…
a_m	y_{m1}	y_{m2}	…	y_{mn}

Tabella 1.1

Criterio 1.1 (Criterio del max-min o criterio di Wald[11]): consiste nel prendere la decisione andando a identificare l'azione che permette di ottenere il massimo tra i benefici minimi. Viene anche chiamato criterio del pessimista, proprio perché il decisore va ad agire in modo molto prudente pensando si realizzerà lo stato che gli permette di conseguire benefici minimi.

$$a^* = \max(\min y_{ij})$$

Criterio 1.2 (Criterio del max-max): atteggiamento tipico dell'ottimista che è sicuro che la natura sarà magnanima con lui e gli permetterà di ottenere il beneficio massimo.

$$a^* = \max(\max y_{ij})$$

[11] Abraham Wald (1902-1950): matematico e statistico statunitense che ha portato contribuiti alla teoria delle decisioni e all'econometria.

Criterio 1.3 (Criterio di Hurwicz[12])

$$a^* = \max\left\{\alpha \min y_{ij} + (1-\alpha) \max y_{ij}\right\}$$

Dove α è un valore compreso tra zero ed uno e vuole indicare il grado di pessimismo dell'agente. Se $\alpha = 1$, il pessimismo domina e si tornerà al primo criterio esaminato, mentre per $\alpha = o$, si avrà espressione analoga a quella dell'ottimista.

Criterio 1.4 (Criterio di Savage[13] o del min-max rimpianto): criterio di chi vuole limitare i danni, cercando di minimizzarli. Per capire questo criterio si supponga di sostituire nella *tabella 1.1* la differenza tra l'elemento che ha valore massimo e l'elemento che occupa quella posizione[14].

$$r_{ij} = \max y_{ij} - y_{ij}$$

Si applica ora il criterio del min-max

$$a^* = \min\left(\max r_{ij}\right)$$

Questi criteri vengono utilizzati, come già riportato, solo per azioni con conseguenze esprimibili in termini monetari, per poter ampliare l'applicazione bisogna tornare alla già citata "teoria dell'utilità".

La teoria dell'utilità vuole identificare dei metodi di scelta che ogni decisore segue per prendere decisioni. Questa teoria vede una prima formulazione con Bernoulli nel 1738, ma il punto di svolta è segnato da Von Neumann e Morgenstern nel 1947 con la pubblicazione del libro *Theory of Games and Economic Behavior*. I due dimostrarono che, ad ogni individuo le cui preferenze soddisfano quattro assiomi, si può associare una funzione di utilità.

Per meglio capire questi assiomi, è importante prima affrontare il tema delle relazioni preferenziali.

1.3 Le relazioni preferenziali

Data una relazione binaria x R y, R rappresenta una relazione tra x e y, per esempio "x è meglio di y" o "x è almeno uguale a y". Se questa relazione non vale, si indica $x\,\overline{R}\,y$, vale a dire "non è vero che x R y".

[12] Leonid Hurwicz (1917-2008): economista statunitense; nel 2007 vince il premio Nobel per l'economia per gli studi sulla teoria delle allocazioni in ambiente incerto.

[13] Leonard Jimmie Savage (1917-1971): matematico e statistico statunitense.

[14] S. Bacci e B. Chiandotto, *Statistica per le decisioni* cit., pag.8

All'interno di questa tesi verrà utilizzata la classica notazione matematica[15] riportata qui di seguito:

∃ il quantificatore esistenziale ('esiste')

∀ il quantificatore universale ('per ogni')

⇒ implicazione logica ('se, allora')⇔ doppia implicazione logica ('se e solo se')

~ negazione ('non')

∨ inclusione ('o')

∧ congiunzione ('e')

= uguaglianza ('uguale a')

∈ appartenenza ('appartiene a')

⊂ inclusione stretta ('contenuto in')

⋂ intersezione di ('elementi che appartengono a entrambi gli insiemi')

⋃ unione di ('elementi che appartengono a uno dei due insieme')

Una qualunque relazione binaria R tra gli elementi $\{a, b, c \ldots\}$ di un insieme A può soddisfare o meno alcune proprietà:

Riflessiva: $\forall\ x \in A: x\ R\ x$

Completa: $\forall\ x, y \in A: (x \neq y) \Rightarrow (x\ R\ y \vee y\ R\ x)$

Transitiva: $\forall\ x, y, z \in A: (x\ R\ y \wedge y\ R\ z) \Rightarrow x\ R\ z$

Antisimmetrica: $\forall x, y \in A: (x\ R\ y \wedge y\ R\ x) \Rightarrow x = y$

Asimmetrica: $\forall x, y \in A: x\ R\ y \Rightarrow \sim (y\ R\ x)$

Simmetrica: $\forall\ x, y \in A: x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$

Nella pubblicazione di Amartya Sen[16] queste proprietà vengono spiegate utilizzando come esempio l'altezza di più montagne.

Consideriamo una relazione "alta almeno tanto quanto", dove x R y significa che la montagna x è alta almeno tanto quanto la y:

- La relazione è riflessiva; infatti, ogni cima è alta almeno tanto quanto sé stessa.
- È anche completa: o la cima x è alta almeno tanto quanto la y o viceversa.
- La relazione è transitiva perché la cima x, che è almeno alta quanto la y, che a sua volta è alto tanto quanto z, è alta almeno alta tanto quanto la z.

[15] Notazione tratta da M. Bergamini, *Gli insiemi, la logica e le relazioni*

[16] Sen, A. (1970), *Collective Choice and Social Welfare*

- Non è una relazione antisimmetrica, poiché x e y possono condividere l'altezza senza essere la stessa montagna.
- Non è asimmetrica perché, se x è alta almeno tanto quanto y, questo non significa necessariamente che y non possa essere alta almeno tanto quanto x; le due montagne potrebbero essere alte uguali.
- Una relazione è simmetrica solo quando le due altezze sono uguali e la relazione ''alta almeno tanto quanto'' non implica per forza questo.

Definizione 1.1 (Relazione di ordine largo)
In base a quante di queste proprietà sono soddisfatte, le relazioni assumono diverse diciture; una relazione viene definita di ordine largo quando è riflessiva, antisimmetrica e transitiva, ad esempio.
Definizione 1.2 (Relazione preferenziale)
Le relazioni preferenziali sono relazioni binarie in cui x R y indica che x è preferito rispetto a y.

1.4 Assiomi fondamentali e la teoria dell'utilità attesa

Per poter identificare la funzione di utilità di ogni individuo, bisogna analizzare i quattro assiomi che le relazioni preferenziali devono rispettare.
Altre caratteristiche degne di nota per poter poi affrontare gli assiomi sono la relazione di preferenza forte e debole e la relazione di indifferenza tra due alternative x e y.

Relazione di preferenza forte: $x \succ y$ indica che l'agente preferisce strettamente l'alternativa x a quella y
Relazione di preferenza debole: $x \geq y$, invece, significa che il decisore preferisce di poco l'alternativa x alla y.
Relazione di indifferenza: $x \sim y$ sancisce che le due alternative sono completamente analoghe agli occhi dell'agente.

Dato l'insieme di oggetti (conseguenze delle azioni) C={x,y,z,...}, i quattro assiomi sono: completezza, transitività, continuità e indipendenza.
Assioma 1.1 (Completezza): ogni agente ha preferenze definite e può sempre scegliere (anche esprimendo indifferenza) tra due scelte.

Assioma 1.2 (Transitività): $\forall\, x, y, z \in C,\ x \geq y$ e $y \geq z \Rightarrow x \geq z$

Assioma 1.3 (Indipendenza): un soggetto che preferisce l'alternativa x alla y, anche messo di fronte ad una terza opzione z, non dovrebbe cambiare la sua preferenza.

Assioma 1.4 (Continuità): se $x \succ y$ e $y \succ z$, allora esiste una probabilità p, tale per cui $y \sim x * p + z * (1-p)$

Grazie a questi assiomi si possono identificare i valori di utilità attesa associati ad ogni scelta e gli individui andranno a scegliere la combinazione con l'utilità attesa più elevata, cioè quella che permette di massimizzare i benefici.

Graficamente la funzione di utilità può essere rappresentata su un diagramma cartesiano e può assumere una delle tre forme della *figura 1.1*. Osservando la forma, si può ricavare l'atteggiamento dell'agente nei confronti del rischio: una curva concava rappresenta un individuo avverso, la retta indica un atteggiamento indifferente al rischio e la funzione convessa è sintomo di propensione al rischio.

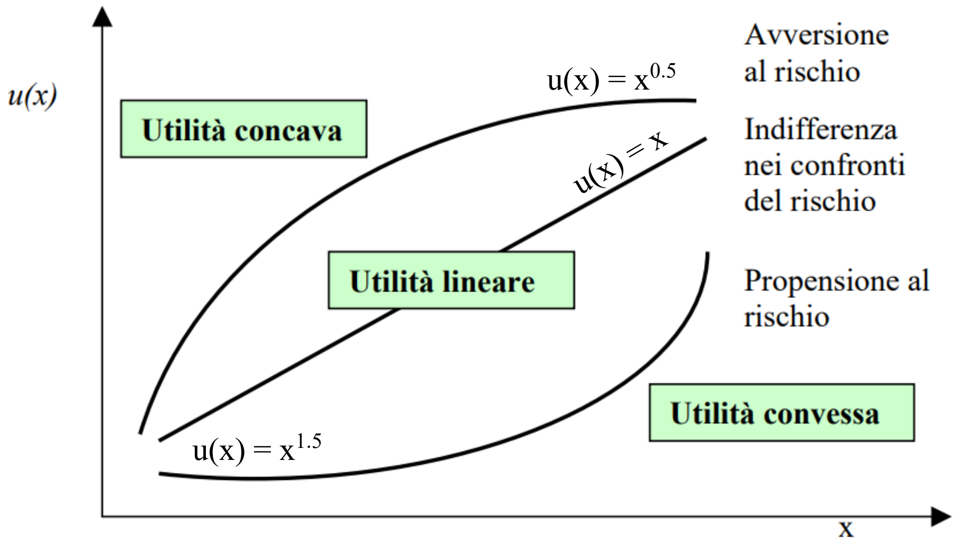

Figura 1.1: S. Bacci e B. Chiandotto, *Statistica per le decisioni*, pag.24

Il grado di propensione al rischio può essere misurato tramite l'indice assoluto di avversione al rischio[17].

$$r_a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

$r_a(x) > 0$ implica avversione al rischio e $r_a(x) < 0$ la propensione.

Questo modello si è visto attribuire diverse critiche nel tempo; in primo luogo, il comportamento dei singoli individui differisce da quello dei principi razionali.
Le persone sono colpite da quelli che oggi Kahneman[18] definisce *bias* o *rumori*, sbagli che si possono realizzare nei processi di decisione. Per questo motivo diverse modifiche e rivisitazioni sono state applicate al modello originale di Von Neumann e Morgenstern.
Un'altra critica, legata sempre al divario tra comportamento ideale ed effettivo, riguarda la complessità del modello. Si è cercato, quindi, di semplificarlo introducendo nuove teorie con assiomi più deboli o del tutto assenti.
Il paradosso che Allais elabora nel 1953 è uno dei più importanti esempi di critica al modello e dimostra come le persone violino l'assioma dell'indipendenza. Nel dettaglio, il paradosso di Allais fa riferimento a un contesto di scelte tra due lotterie, in cui ognuna di queste si vede associata un determinato rischio e rendimento. Empiricamente, è dimostrato che la maggior parte delle persone tende a prendere decisioni contraddittorie tra loro, andando così a violare l'assioma dell'indipendenza.

1.5 Decisioni collettive

Con scelta collettiva si fa riferimento ad una decisione che vede coinvolti gli interessi di tanti individui; questo tipo di scelte trova applicazione in una moltitudine di scenari: all'interno di una giuria, nelle aziende, nelle scienze politiche, per esempio.
L'obiettivo che ci si presuppone di raggiungere è quello di individuare una modalità per trasformare le preferenze e le scelte individuali in preferenze e scelte collettive. Per far ciò, bisogna trovare una regola di aggregazione ed escogitare un modo per raggirare i conflitti che probabilmente nasceranno all'interno del gruppo.

[17] Pratt, Arrow
[18] D. Kahneman (2021), *Rumore: come l'inconsapevolezza dell'irrazionalità porta a decisioni sbagliate*

Come si raggiunge questo accordo? E come vengono trasformate le preferenze e le scelte individuali?
La teoria delle scelte sociali cerca di dare una risposta a queste domande individuando i vari metodi di aggregazione e analizzandone il funzionamento, le differenze tra i vari modelli, i presupposti e le conseguenze. In più, ricerca un modello che si possa definire ideale.
Esistono testimonianze riguardo la presenza della teoria delle scelte collettive già a partire dal IV secolo a.C., quando Aristotele analizzava diverse modalità di prendere decisioni in modo collettivo nella sua *Politica*[19].
La vera nascita della teoria delle decisioni collettive, come la conosciamo oggi, viene tuttavia individuata nell'atmosfera dell'illuminismo francese con Marie Jean de Condorcet e Jean Charles de Borda[20].

1.5.1 Modello di scelta sociale

Le componenti di un modello di scelta sociale sono:

- Un insieme di alternative X
- Un profilo di preferenze $R = \{R_1, R_2, \dots, R_i, \dots, R_n\}$ che identifica le preferenze degli *n* individui appartenenti alla società.
- Una funzione *f* (regola di aggregazione) che definisce la relazione di preferenza sociale comune a tutti gli individui.

Verranno prese in considerazione le seguenti ipotesi:

- X è un insieme finito e con almeno tre alternative
- $N = \{1, 2, \dots, n\}$ è l'insieme dei partecipanti e conta di almeno due persone
- La preferenza associata ad ogni individuo R_i è di ordine largo (riflessiva, antisimmetrica e transitiva)
- La relazione di preferenza sociale R è riflessiva e completa

Indichiamo con $R = f\ (R)$ la relazione di preferenza sociale "*socialmente preferito o indifferente a*". Le relazioni P (socialmente preferito) e I (socialmente indifferente) sono ricavate da R come segue:

---

[19] *Politica* è un'opera suddivisa in otto libri, nei quali Aristotele analizza le dinamiche di politica nei vari contesti e ricerca la migliore forma di governo attraverso lo studio delle varie tipologie e le corrispettive varianti corrotte.
[20] Il marchese Marie-Jean-Antoine-Nicolas de Caritat (1743-1794) o Nicolas de Condorcet, come era noto ai suoi contemporanei, era un filosofo, matematico, economista francese, membro del celeberrimo gruppo degli *Encyclopédistes* insieme a, tra gli altri, Diderot, D'Alembert e Voltaire.
Jean-Charles de Borda (1733-1799) è stato un ufficiale francese che ha portato avanti diversi studi sulla balistica e l'idrodinamica, noto anche nella statistica per il metodo Borda.

$$\forall\, x, y \in X, xPy \iff xRy \wedge \sim yRx$$
$$\forall\, x, y \in X, xIy \iff xRy \wedge yRx$$

Nel primo caso si vuole indicare che la scelta x è favorita a y se e solo se x è sempre preferita a y e y non è mai preferita a x, mentre il secondo, in modo analogo, significa che la scelta x è considerata uguale a y se e solo se x è indifferente a y e y è indifferente a x.

Si può decidere di non accettare l'ipotesi di indifferenza tra alternative e, in questi casi, la relazione di preferenza individuale P_i prende il nome di ordine stretto.

Definiamo $\mathfrak{R}^n$ l'insieme dei possibili profili di preferenza, possiamo ora individuare l'insieme degli individui che preferiscono x a y come:

$$P\,(x, y, R) = \{i \in N : xP_iy\} \text{ con } R \in \mathfrak{R}^n \text{ e } x, y \in X$$

A questo punto possiamo anche facilmente unire l'insieme di chi preferisce x a y e chi è indifferente tra le due:

$$R(x, y, R) = \{i \in N : xP_iy\}, I\,(x, y, R) = \{i \in N : xI_iy\}$$

Definizione 1.3 (Criterio di maggioranza semplice):

Il criterio f^{maj} si basa sul principio della maggioranza semplice

$$\forall\, x, y \in X, xR^{maj}y \iff |R\,(x, y, R)| \geq \frac{n}{2}$$

$R^{maj} = f^{maj}$ (R) è la relazione ottenuta da f^{maj} dato R.

Definizione 1.4 (Regola di Borda):

La regola f^B considera il posizionamento delle alternative dal punto di vista individuale. Supponendo nuovamente le singole relazioni preferenziali di ordine stretto e indicando con $r_i(x)$ la posizione in classifica dell'alternativa x per l'individuo i, allora

$$\forall\, x, y \in X, xR^By \iff \sum_N r_i(x) \leq \sum_N r_i(y)$$

$R^B = f^B(P)$ è la relazione di preferenza di Borda ottenuta da f^B dato P.

Esempio 1.1 (Criteri di aggregazione):

Consideriamo $N = \{1, 2, 3\}$, $X = \{w, x, y, z\}$ e il profilo di preferenza $P = (P_1, P_2, P_3)$:

P_1: $wP_1xP_1yP_1z$

P_2: $yP_2zP_2xP_2w$

P_3: $zP_3yP_3wP_3x$

Calcoliamo la relazione R^{maj} corrispondente al profilo P:

$$|R(y,z;R)| = 2, |R\ (z,w;R)| = 2, |R(w,x;R)| = 2$$

Quindi, per definizione,

$yR^{maj}zR^{maj}wR^{maj}x$

Possiamo ora calcolare R^B. Visto che:

$$\sum_N r_i(x) = 9, \quad \sum_N r_i(y) = 6, \quad \sum_N r_i(z) = 7, \quad \sum_N r_i(w) = 8$$

allora,

$$yR^BzR^BwR^Bx$$

I due metodi restituiscono lo stesso ordinamento.

Il problema principale riguardo alla teoria delle scelte sociali è riportato da Arrow nel 1951, quando dimostrò che, imponendo delle condizioni più che ragionevoli a circostanze in cui viene utilizzata questa teoria, ad esempio in un sistema elettorale, si scopre che è impossibile rispettarle tutte. Le condizioni prese in considerazione sono caratteristiche fondamentali di democrazia; quindi, dicendo che queste non possono essere soddisfatte, si afferma che la democrazia non è possibile.

Capitolo due
Teorema di Arrow

Kenneth Arrow (1921-2017) è stato colui che ha rivoluzionato la teoria delle scelte sociali; in particolare, nella sua opera *Social choice and individual values (1951),* si pone l'obiettivo di identificare una regola che permetta di aggregare le preferenze individuali in modo da prendere una decisione a livello sociale tra più alternative. Tale regola dovrebbe soddisfare alcune condizioni, tra cui, la più ovvia, il criterio di Pareto: se ogni singolo individuo preferisce l'alternativa x alla y, allora l'alternativa x è socialmente preferita alla y.
Queste regole, che finora abbiamo chiamato ''metodi di aggregazione'', in ambito economico prendono il nome di funzioni del benessere, mentre Arrow le definisce regole costituzionali[21].
Arrow giunse all'elaborazione del suo teorema partendo da un quesito semplice; come possono gli azionisti, in modo collettivo, decidere sugli investimenti della loro compagnia? In altri termini, come possono venire aggregate le preferenze di singoli individui, gli azionisti, per prendere una decisione comune, l'investimento?
Successivamente, l'economista utilizza i casi di votazione come scelte sociali in quanto rendono i ragionamenti più intuitivi. La domanda diventa, quindi, come vengono prese decisioni collettive, intese come il risultato di aggregazione di preferenze di elettori che valutano i singoli candidati o le proposte ed esprimono il loro giudizio attraverso i voti.
Una volta capito l'obiettivo di Arrow, andiamo ora ad esplicitare i cinque criteri che ogni regola di aggregazione deve soddisfare:

Criterio 2.1 (U: Non restrizione del dominio)
Questo criterio indica che sono accettabili tutti i profili preferenziali, senza nessun limite. Per M possibili stati sociali, esistono M! profili possibili.
Criterio 2.2 (T: Transitività)
La funzione deve rispettare il criterio di transitività che è del tutto uguale a quello già definito nel capitolo precedente: se socialmente si preferisce l'alternativa x a y e la y a z, allora l'alternativa x deve essere per forza favorita a z.

[21] Nella letteratura, e quindi in questo lavoro, regola di aggregazione, funzione di benessere sociale e regola costituzionale vengono utilizzati come sinonimi.

Criterio 2.3 (P: Principio di Pareto)

Se ogni individuo preferisce x a y, allora anche socialmente x è preferita a y.

$(\forall i \in N, xP_i y) \Rightarrow xPy$

Criterio 2.4 (D: Assenza di dittatore)

Non esiste un individuo che, a prescindere dalle scelte dei singoli membri, determini da solo la scelta collettiva

$\exists!\, i \in N: xP_i\, y \;\Rightarrow \sim x\, P\, y$

Criterio 2.5 (IIA: Indipendenza delle alternative irrilevanti)

Nel momento in cui un individuo esprime la preferenza di x rispetto a y, sono rilevanti solo le preferenze tra queste due opzioni; quindi, l'introduzione di una qualsiasi z non dovrebbe cambiare la preferenza già sostenuta.

Definizione 2.1 (Funzione di benessere sociale)

Una regola che soddisfa la proprietà U e T viene spesso definita funzione di benessere sociale.

Come già detto, queste caratteristiche descrivono un ambiente democratico; infatti, la scelta deve rispettare la libertà individuale (U) e le decisioni unanimi (P), deve rifiutare un unico decisore (D) e va ad escludere comportamenti disonesti (IIA).

Questo ultimo criterio esclude la comparazione dell'intensità di preferenze che potrebbe portare a non essere onesti. Una regola che viola questa condizione è quella di Borda: metodo che considera l'intensità delle preferenze assegnando un punteggio più o meno alto in base alla classifica individuale delle alternative, un punteggio basso indica una scelta "più preferita" e uno alto "meno preferita".

Teorema 2.1 (Il teorema della possibilità generale)

Il teorema di Arrow annuncia che se ci sono almeno tre differenti stati sociali e un numero finito di individui, allora nessuna funzione del benessere sociale può soddisfare U, T, D, P e IIA contemporaneamente[22].

Un modo comune di esprimere questo risultato è affermare che, se una regola di aggregazione soddisfa le proprietà U, T, P e IIA, allora deve essere dittatoriale. Arrow riassume questo concetto dicendo che, se noi escludiamo la possibilità di comparazioni interpersonali di utilità,

[22] Maskin, E, Sen, A. (2014), *The arrow impossibility theorem*, cit., II section.

gli unici metodi per passare dalle preferenze individuali alle scelte sociali, che siano accettabili e che siano definiti per un vasto insieme di profili di preferenze individuali, sono o imposti o dittatoriali[23].

2.1 Dimostrazione del teorema di Arrow

Dimostriamo ora il teorema nella seconda modalità enunciata, cioè che, se una regola di aggregazione soddisfa U, T, P e IIA, allora non soddisfa D.

Questa prova viene proposta da Amartya Sen e lo fa attraverso la dimostrazione di due affermazioni (*lemmi).*

Consideriamo un insieme di individui appartenenti a D, $D \subset N$, e una regola di aggregazione che soddisfi U, T, P e IIA.

Definizione 2.2 (Insieme quasi decisivo):

Dato un profilo di preferenze dove tutti i membri di D preferiscono x a y e tutti quelli non in D preferiscono y a x e socialmente x è preferito a y, allora D viene definito quasi decisivo[24] tra x e y. Un individuo è quasi decisivo quando è colui che determina la preferenza collettiva pur avendo un'opposizione.

Definizione 2.3 (Insieme decisivo):

Dato un profilo D con determinate preferenze, senza nulla sapere sulle preferenze degli individui in N/D, l'insieme D sarà decisivo se le alternative favorite dai membri di D riguardo tutte le coppie sono anche le preferenze sociali. Un insieme è decisivo quando è quasi decisivo per ogni coppia. Una persona decisiva è un dittatore, perché le sue scelte diventano automaticamente quelle sociali a prescindere dalle preferenze degli altri membri della collettività.

Enunciato 2.1 (Lemma I)

Un gruppo quasi decisivo per una coppia (x, y) deve essere anche decisivo.

In termini non matematici, la decisività di un gruppo si espande da una coppia a tutta la graduatoria.

[23] Arrow, K. (1963), *Social choice and individual values*, cit. pag.28

[24] Sen utilizza questo termine, però, per meglio comprendere, si può pensare a *localmente decisivo (*quasi decisivo) quando ci sono individui che preferiscono x a y e altri che preferiscono il contrario, mentre *globalmente decisivo* (decisivo) quando non si sa se c'è opposizione o no.

Dimostrazione 2.1

- Scegliamo una coppia (a, b), diversa da x e y. Supponiamo che tutti gli individui preferiscano a a x e y a b.
- Dividiamo i membri della società in due gruppi: D e N/D, supponiamo poi che in D x sia preferito a y.
- Per il criterio di Pareto, visto che tutti condividono la preferenza di a su x e di y su b, socialmente *aPx* e *yPb.*
- Ipotizzando l'insieme D come quasi decisivo, le sue preferenze riguardo la coppia (x, y) diventano quelle dell'intero gruppo: *xPy*
- Quindi: $aPxPyPb$
- Avendo fissato le preferenze solo di D, notiamo che l'insieme D è quasi decisivo anche su a e b, ripetendo il procedimento si giunge alla conclusione che lo è per ogni coppia e quindi è decisivo.

Enunciato 2.2 (Lemma II)

Ogni gruppo decisivo può essere ridotto a un gruppo ancora più piccolo che rimane decisivo. In termini non matematici, la decisività di un gruppo può fare a meno di alcuni componenti.

Dimostrazione 2.2

- Ipotizziamo di dividere D in due sottogruppi: D1 e D2.
- Supponiamo che in D1 sia preferita x rispetto a y e z, senza avere nessuna informazione circa la preferenza tra y e z.
- Invece, tutti gli individui in D2 preferiscono sia x sia z rispetto a y, senza nulla aggiungere sulla preferenza tra x e z.
- Tutti gli individui in N/D possono avere qualsiasi preferenza.
- Essendo D decisivo, xPy
- Bisogna ora indagare rispetto alle alternative z e x: o zPx o xPz.
- Possiamo verificare che in entrambi i casi, almeno uno tra D1 e D2, deve essere decisivo.
- Prendiamo in considerazione la coppia (z, x), nel caso zPx, visto che x è preferito a y, allora z sarà preferito a y secondo la proprietà transitiva.
- Per quanto riguarda le preferenze rispetto alla coppia (z, y), queste sono state espresse solo per il gruppo D2, ne deduciamo che è quasi decisivo rispetto a questa coppia. E, per il lemma precedente, se è quasi decisivo, lo è anche globalmente.

- In modo simmetrico, considerando xPz, sarà D1 ad essere quasi decisivo e di conseguenza decisivo.

Enunciato 2.3 (Dimostrazione teorema di Arrow):
Una regola che soddisfa le condizioni U, P, IIA e T implica che l'insieme di tutti gli elettori è quasi decisivo. Per il primo lemma, è anche decisivo. Per il secondo lemma, anche un suo sottoinsieme deve essere decisivo. Trattandosi di un numero finito di persone, continuando a ripetere il procedimento, si può arrivare ad avere un sottoinsieme composto da una sola persona; in questo caso si parlerà di dittatura.

c.v.d.

L'essenza del teorema di Arrow è che non esiste un metodo sicuro per trasformare le preferenze individuali in preferenze sociali.

2.2 Applicazioni dell'impossibilità

Ci dedicheremo ora all'applicazione del teorema dell'impossibilità di Arrow alle elezioni, come lui stesso ha fatto.
Supponiamo che ci sia un posto vacante per una carica e che la si voglia assegnare attraverso un'elezione. La regola di votazione è ciò che permette di individuare il vincitore tra tanti candidati sulla base delle preferenze di ogni soggetto appartenente alla società.
Esistono diverse modalità per trasformare i voti degli elettori nella decisione collettiva, un esempio è la *plurality rule*[25], vale a dire che vince il candidato che più persone nominano come favorito.

Esempio 2.1 (Votazione a pluralità)
Il candidato x è il preferito per il 40% degli elettori. Il 35% preferisce y e il restante 25% ha indicato come prima scelta il candidato z.
È lapalissiano che la scelta sociale debba ricadere sul candidato x.
Questo metodo era già stato analizzato nel '700 dal marchese di Condorcet che lo chiamava metodo maggioritario e andava a considerare l'intero profilo di preferenze.

[25] Spesso viene indicato tramite l'espressione *first-past-the-post* per indicare che vince semplicemente chi ottiene più voti anche se non viene raggiunta una maggioranza. Si tratta quindi di una maggioranza relativa e non assoluta.

Esempio 2.2 (Votazione a maggioranza)

40%	35%	25%
x	y	z
y	z	y
z	x	x

Tabella 2.1

In questo caso la scelta sociale ricade su y, visto che è questa l'alternativa che vince sia su x (60%), sia su z (75%).
Quindi, nonostante le prime scelte siano le stesse e con le stesse percentuali dell'*esempio 2.1*, in base al fatto che si consideri l'intero profilo di preferenze o meno, la decisione cambia.

L'approccio di Arrow nei confronti della disciplina delle votazioni consiste nell'individuare delle caratteristiche fondamentali e cercare una regola che le soddisfi tutte.
Le caratteristiche in questione sono gli assiomi già evidenziati, che possono però essere riproposti in ottica di votazione in questo modo:
Assioma 2.1 (Decisione): ci deve essere un solo vincitore
Assioma 2.2 (Pareto): se tutti votano x, non può vincere y
Assioma 2.3 (Non-dittatore): nessun elettore può decidere da solo
Assioma 2.4 (Indipendenza dei candidati irrilevanti): se il candidato x è preferito a y, allora anche aggiungendo un candidato z, la preferenza iniziale non dovrebbe modificarsi.
Nella realtà più di una di queste proprietà vengono violate: nei sistemi che seguono la *plurality rule* può capitare che l'ultimo criterio non venga rispettato a causa del fenomeno degli *spoilers*[26].
La regola della maggioranza relativa, in più, non soddisfa il criterio "decisione". Andiamo ora a verificare in che modo questa regola va a violare il criterio decisionale.

2.2.1 Paradosso di Condorcet

Nel 1785[27], il marchese di Condorcet pubblica un saggio nel quale analizza le scelte collettive; il risultato di fronte al quale si trova è un paradosso che diventerà famoso come *il paradosso del voto*.
Condorcet, nel suo lavoro, considera il metodo maggioritario; questo consiste nel confrontare a coppie le varie opzioni. In particolare, funziona come un ballottaggio: per prima cosa si

[26] Fenomeno che si verifica in quei sistemi elettorali del tipo "first-past-the-post", quando due candidati hanno manifesti politici simili e vanno quindi a causare una spartizione dei voti dell'elettorato che condividono a favore degli avversari.
[27] Condorcet, *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix.*

confrontano due scelte a caso, poi, ipotizzando una elezione con tre possibili scelte, la seconda votazione prevede un confronto tra il perdente di prima e la terza opzione. A questo punto si è in grado di ordinare le preferenze.

Questo paradosso viene spesso utilizzato per dimostrare il teorema di Arrow, nonostante Condorcet abbia elaborato il paradosso al voto in una data antecedente quella del teorema dell'impossibilità.

Il metodo maggioritario soddisfa la condizione U del teorema, infatti nessun profilo viene limitato. In più, è coerente con le proprietà P, IIA e D; il problema nasce con la transitività.

Questa caratteristica del sistema maggioritario era stata già evidenziata, oltre che dal marchese di Condorcet, anche da C.L. Dodgson[28] nel 1873.

Esempio 2.3 (Maggioranza ciclica)

Dati un insieme di tre elettori $N = \{1, 2, 3\}$, un insieme di candidati $X = \{x, y, z\}$, il profilo di preferenze $R = \{R_1, R_2, R_3\}$ e le preferenze di ogni elettore:

R_1: x R_1 y R_1 z

R_2: y R_2 z R_2 x

R_3: z R_3 x R_1 y

$$|R(x, y; R)| = 2, |R\ (y, z; R)| = 2, |R(z, x; R)| = 2$$

Da cui deriva:

$$xR^{maj}yR^{maj}zR^{maj}x$$

Secondo il principio della transitività, se x vince su y e y vince su z, x dovrebbe avere la meglio contro z, eppure non è così. In più, proponendo altri ordini di partenza per il ballottaggio, si nota come ogni volta cambia vincitore.

$$|R(y, z; R)| = 2, |R\ (z, x; R)| = 2, |R(x, y; R)| = 2$$

$$yR^{maj}zR^{maj}xR^{maj}y$$

[28] Meglio conosciuto come Lewis Carroll, quasi cento anni dopo le pubblicazioni di Condorcet pubblica un lavoro sui metodi di votazione (*A discussion of the various methods of procedure in conducting elections)*, venne preso sul serio solo nella seconda metà del '900 grazie a Duncan Black, economista appassionato delle scelte collettive. Dogson aveva dimostrato il fallimento di sette metodi di prendere decisioni (utilizzando uno schema di undici elettori e quattro candidati).

Ci si riferisce spesso a questo fenomeno attraverso l'espressione "maggioranza ciclica", proprio a causa del circolo che va a crearsi confrontando le varie coppie. A prescindere da quale punto del "cerchio" si parte, si otterrà una scelta diversa.

In questo caso il principio della transitività non è rispettato; tuttavia, non è vero che il metodo maggioritario fallisce sempre.

Esempio 2.4 (Condorcet-consistente)

R_1: x R_1 y R_1 z

R_2: y R_2 z R_2 x

R_3: z R_3 **y** R_1 **x**

$$|R(y,x;R)| = 2, |R\ (z,x;R)| = 2, |R(y,z;R)| = 2$$

$$yR^{maj}zR^{maj}x$$

Definizione 2.4 (Condorcet-vincitore)

Un'alternativa x viene definita Condorcet-vincitore se $xP^{maj}y$ per ogni y contenuta nell'insieme di tutte le alternative.

Definizione 2.5 (Condorcet-consistente)

Una funzione che permette di trovare un vincitore è detta Condorcet-consistente.

2.2.2 Metodo del punteggio di Borda

Il paradosso del voto si verifica anche con altri metodi di votazione; andremo ora ad analizzare il metodo di Borda[29].

Questo modo di aggregare le preferenze individuali è già stato argomento del primo capitolo. Rimaniamo, quindi, nell'ipotesi di elezione elettorale e immaginiamo ci siano tre elettori e altrettanti candidati; ogni elettore deve assegnare un punto alla scelta che considera favorita, due alla seconda e tre punti alla scelta in terza posizione. Di conseguenza, vince chi ha meno punti.

[29] Questo metodo viene formalizzato da Jean-Charles de Borda nel 1781, quindi nello stesso periodo in cui Condorcet analizzava il metodo maggioritario.

Esempio 2.5 (Metodo di Borda)

Riprendiamo i dati dell'*esempio 2.4*, ma utilizzando la regola di Borda.

R_1: x R_1 y R_1 z

R_2: y R_2 z R_2 x

R_3: z R_3 y R_1 x

In questo modo vince y:

$$\sum\nolimits_N r_i(x) = 7, \quad \sum\nolimits_N r_i(y) = 5, \quad \sum\nolimits_N r_i(z) = 6,$$

$$yR^B xR^B z$$

Proviamo a cambiare l'ordine delle preferenze per verificare se anche in tal caso l'ipotesi si verifica.

Esempio 2.6 (Violazione assiomi con metodo di Borda)

Utilizziamo questa volta i dati dell'*esempio 2.3*.

R_1: x R_1 y R_1 z

R_2: y R_2 z R_2 x

R_3: z R_3 x R_1 y

$$\sum\nolimits_N r_i(x) = 6, \quad \sum\nolimits_N r_i(y) = 6, \quad \sum\nolimits_N r_i(z) = 6,$$

In modo analogo a quando abbiamo utilizzato il metodo di Condorcet, questo ordinamento di preferenze ci pone un problema non indifferente; tutte le alternative sono socialmente indifferenti.

2.3 Ulteriori dimostrazioni del teorema di Arrow

Diversi concetti economici dimostrano e sono dimostrati dal teorema di Arrow:

2.3.1 Il dilemma del prigioniero[30]

Nello stesso periodo in cui Arrow pubblicava il suo teorema dell'impossibilità, Albert Tucker[31] proponeva il dilemma del prigioniero e John Nash[32] diffondeva uno studio sul concetto di equilibrio in un gioco. Questi tre concetti sono complementari tra loro e permettono di dimostrare ulteriormente il teorema generale dell'impossibilità.

Il dilemma del prigioniero rappresenta la base della teoria dei giochi, vale a dire la disciplina che si occupa di studiare il comportamento degli individui in situazioni di conflitto.

Quando si parla di teoria dei giochi, bisogna tenere a mente l'acronimo PAPI; questo permette di elencare le regole del gioco:

- **P**layers: gli agenti economici che fanno parte del gioco
- **A**ctions: quali azioni possono compiere
- **P**ayoffs: i profitti (utilità) degli agenti
- **I**nformation: gioco simultaneo o dinamico

Il gioco del prigioniero vede come partecipanti due individui sospettati di aver commesso un reato grave e quindi sottoposti ad una situazione di fermo; tuttavia, gli inquirenti dispongono di prove solo riguardo ad un reato minore da loro commesso. I criminali sono situati in stanze distinte e vengono loro date due opzioni: confessare o non confessare.

I due sono informati delle conseguenze che derivano a seconda che decidano di confessare o meno;

- Se solo uno di loro confessa, questo vedrà una riduzione di pena molto significativa, mentre l'altro verrà condannato per il reato grave.
- Se entrambi confessano, tutti e due vedranno una riduzione, ma meno importante rispetto a quella del primo caso.
- Se nessuno confessa possono essere condannati solo per il reato minore, che vede una pena decisamente inferiore rispetto a quella prevista per il reato grave.

[30] Questa parte è basata sugli appunti delle lezioni del Professore M. Alderighi.
[31] A. Tucker (1905-1995): matematico canadese che, nel 1950, ha dato l'interpretazione moderna al dilemma del prigioniero
[32] J. Nash (1928-2015): matematico ed economista statunitense, a Princeton, nel 1949, compì studi sulla teoria dei giochi che, nel 1994, gli valsero il premio Nobel per l'economia.

Si tratta di un gioco simultaneo; infatti entrambi devono giocare la loro mossa senza sapere cosa farà l'altro.
Si possono rappresentare i *payoff* (in anni di carcere e quindi con il segno negativo) derivanti da ogni azione in una matrice come quella della *tabella 2.2*.

Giocatore 2 ► Giocatore 1 ▼	**Confessare**	**Non confessare**
Confessare	-5; -5	-1; -10
Non confessare	-10; -1	-2; -2

Tabella 2.2

Per un occhio estraneo alla teoria dei giochi, viene spontaneo indicare come soluzione ottima il *payoff* (-2; -2), tuttavia questo non è un equilibrio di Nash; infatti, ipotizzando di accettare questa opzione, si nota subito come entrambi i due giocatori avrebbero un incentivo a cambiare mossa per ottenere meno anni di carcere.
La strategia dominante per i due criminali è rappresentata dall'azione "confessa", che porta al *payoff* (-5; -5), tuttavia se si pensa al gruppo (formato da loro due) sarebbe meglio nessuno confessasse in modo da rimanere meno tempo possibile in carcere.
Ed ecco che anche il dilemma del prigioniero dimostra ulteriormente il teorema di Arrow; entrambi evidenziano la difficoltà di raggiungere un risultato che sia, allo stesso tempo, individualmente e socialmente ottimale.

2.3.2 Il paradosso del gelato di Hotelling

Supponiamo che in una spiaggia lunga un chilometro ci siano due gelatai, per semplicità offrono lo stesso prodotto allo stesso prezzo. Non c'è differenziazione di prodotto. Pare evidente che un bagnante preferirà comprare il gelato dal chiosco che ha più vicino per una pura questione di pigrizia.
Quello che ne risulta è che la posizione in cui vorranno posizionarsi i due gelatai non è quella ideale a livello collettivo; ed ecco che si ripropone il solito problema.
Per i bagnanti la posizione migliore è quella per cui avranno un chiosco vicino alla propria sdraio; questo implica che i due gelatai si posizionino rispettivamente a 250 metri dall'inizio e ad altrettanti dalla fine. In questo modo il bagnante più lontano dovrà percorrere 250 metri come nella *figura 2.1*.

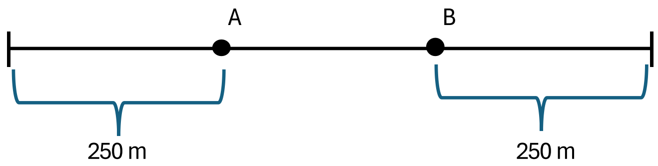

Figura 2.1

Per i gelatai questa posizione non è ottimale; entrambi possono aumentare il loro beneficio spostandosi verso il centro, rubando così clienti all'altro. Questa dinamica implica che i due si ritroveranno a metà della spiaggia e il bagnante che si trova all'inizio o alla fine della spiaggia dovrà ora percorrere 500 metri.

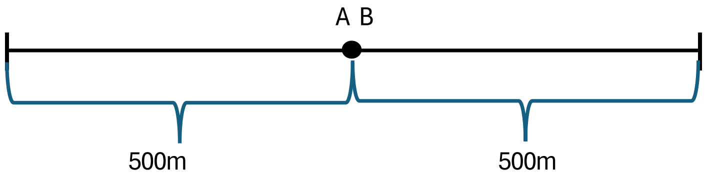

Figura 2.2

Questo scenario, come tutti i modelli economici utilizzati fino a questo momento, ha una traduzione politica. Lo sforzo che bisogna fare è quello di immaginare i bagnanti come un elettorato politico in cui i due lati della spiaggia rappresentano l'estrema sinistra e l'estrema destra e i due gelatai i candidati. Ogni elettore andrà a votare per chi vicino, non più fisicamente, ma idealmente, alle proprie idee. Analogamente a come accadeva per i due chioschi, i candidati si ritroveranno posizionati fianco a fianco al centro della spiaggia elettorale[33]. Per l'insieme degli elettori, quindi a livello collettivo, l'ideale sarebbe avere un candidato che rispetti i propri interessi; i due candidati, invece, avranno interesse a posizionarsi in centro all'elettorato, condividendo idee di destra e di sinistra, per ottenere più voti.

[33] Palladino, D. (2022), *I paradossi della democrazia*, cit. pag.72

2.4 Alcune soluzioni al teorema dell'impossibilità

Un metodo per raggirare il problema dell'impossibilità è violare una delle condizioni di Arrow, per esempio il criterio 2.1.

Violazione criterio 2.1 (U: Non restrizione del dominio)

L'idea alla base è quella di andare a escludere a priori alcuni profili di preferenza; nel dettaglio, andiamo a rappresentare tutti i possibili ordinamenti individuali in un grafico in cui sulle ascisse poniamo le tre alternative e, sulle ordinate, la posizione di preferenza individuale (I, II, III).

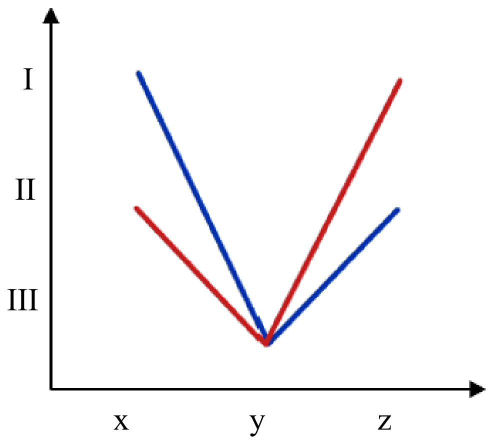

Figura 2.3

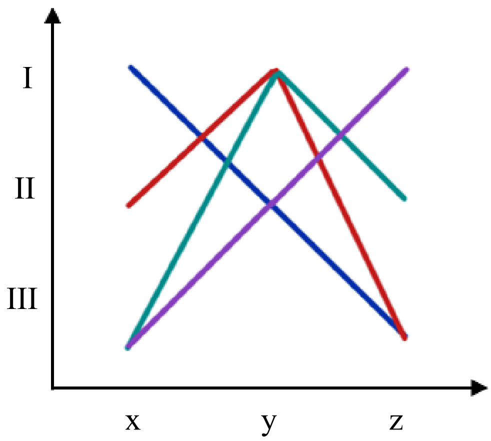

Figura 2.4

- **Profili bimodali**: nella *figura 2.3* sono riprodotti profili in cui l'alternativa centrale nella disposizione occupa la posizione più bassa nelle preferenze individuali.
- **Profili unimodali**: la *figura 2.4* rappresenta profili monotoni crescenti o decrescenti o crescenti fino al massimo e poi decrescenti.

Decidendo di considerare solo profili unimodali, è sempre possibile trovare una regola costituzionale. In più, è possibile enunciare un nuovo teorema.

Teorema 2.2 (Teorema dell'elettore mediano)

Prendendo in considerazione solo i profili unimodali di preferenze individuali, l'alternativa posizionata al centro coincide con la scelta preferita socialmente.

Violazione criterio 2.5 (IIA: indipendenza delle alternative irrilevanti)

Abbiamo già dimostrato in che modo il metodo di Borda viola la condizione IIA; possiamo ora dimostrare che questo permette, in alcuni casi, di ottenere un ordinamento coerente che non si riuscirebbe ad ottenere con il metodo maggioritario.

Esempio 2.7 (Confronto Borda e maggioritario)

Consideriamo un esempio con tre individui (1, 2, 3) che esprimono preferenze riguardo quattro scelte (x, y, z, w) come nella *tabella 2.3*.

INDIVIDUI				METODO DI VOTAZIONE	
1	2	3		Maggioritario	Metodo di Borda
x	z	y		x > y	z = 3+1+2 = 6
y	w	z		y > z	y = 2+4+1 = 7
z	x	w		z > w	x = 1+3+4 = 8
w	y	x		w > x	w = 4+2+3 = 9

Tabella 2.3

Il maggioritario ci restituisce un risultato ciclico, quindi inconcludente.

Invece, il metodo di Borda ci permette di ordinare le preferenze $\{z, y, x, w\}$

Questo metodo va ad incentivare comportamenti strategici o manifestazioni non veritiere in modo da invertire la scelta sociale; infatti, se gli individui 1 e 3 andassero a sottovalutare l'opzione z, ne guadagnerebbero entrambi perché la preferita socialmente diventerebbe y. Esistono diverse testimonianze di esempi in cui, seguendo comportamenti del genere, si è riusciti a manipolare il risultato di votazioni.

Partendo da questo risultato, Gibbard e Satterthwaite[34] pronunciarono un nuovo teorema intorno alla metà degli anni Settanta.

Teorema 2.3 (Teorema di Gibbard e Satterthwaite)

Qualsiasi metodo di elezioni democratiche che pretenda di eleggere un vincitore tra almeno tre candidati può essere manipolato.

I due economisti dimostrarono che gli elettori, esprimendo preferenze che non rispettano i loro gusti, possono portare all'elezione di un candidato che altrimenti non avrebbe mai raggiunto la vittoria. Ad esempio, in una votazione di un disegno di legge presentato alla Camera degli Stati Uniti d'America nel 1956, i repubblicani riuscirono a boicottare l'approvazione della legge comportandosi in modo opposto ai loro interessi nel primo turno di elezioni e spostando poi la preferenza nel secondo turno.

Questo è un concetto che vede un'applicazione anche in ambito economico, attraverso l'impegno strategico vincolante.

[34] A. Gibbard (1942-) e M.A. Satterthwaite pubblicarono rispettivamente le proprie tesi di dottorato nel 1973 e 1975. Pur non conoscendo l'uno gli studi dell'altro, arrivarono alle stesse conclusioni; per questo motivo il teorema porta il nome di entrambi.

In un ambiente strategico le decisioni sono influenzate dalle azioni degli altri, in un gioco dinamico, se ci si comporta in modo non onesto nel primo stadio, è possibile cambiare il risultato del gioco.

Definizione 2.6 (Impegno strategico)
L'impegno strategico vincolante è la decisione di attuare un'azione che limita la propria attività nella prima fase del gioco, in modo da influenzare l'azione del secondo giocatore e ottenere un vantaggio alla fine del gioco.

Supponiamo una situazione di guerra tra due paesi A e B. Questi si trovano ai lati di un'isola contesa a cui entrambi possono accedere tramite due distinti ponti (una dal lato di A e l'altro da quello di B); ipotizzando che il primo paese ad arrivare sull'isola faccia saltare in aria il ponte dietro di sé, questo è un chiaro esempio di impegno strategico vincolante. Infatti, l'altro paese sa che nel momento in cui decide di tentare l'attacco per conquistare l'isola, non esiste l'opzione di spingere indietro i suoi avversari, dovrà sterminarli tutti.
In modo da evidenziare il vantaggio che permette di ottenere l'impegno strategico, andiamo in un primo momento a rappresentare questa situazione, nella *tabella 2.4*, come un gioco simultaneo.

Paese B ► **Paese A ▼**	**Aggressivo**	**Passivo**
Aggressivo	12; 4	16; 5
Passivo	15; 7	18; 6

Tabella 2.4

In questo caso, la strategia dominante per A è agire in modo passivo, mentre B non ha strategie dominanti. L'equilibrio di Nash è $\{15; 7\}$.

Trasformando il gioco in dinamico, la situazione cambia:

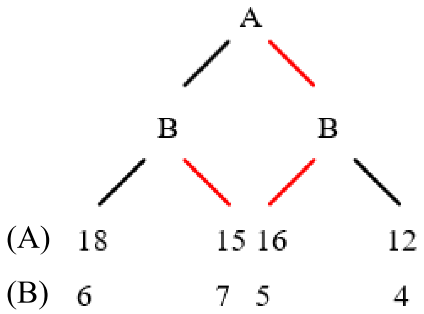

Figura 2.5

Se diamo la possibilità ad A di agire per primo, avrà modo di attuare l'impegno strategico e aumentare il suo payoff.

Per trovare l'equilibrio, bisogna utilizzare il meccanismo della *backward induction*[35]; l'equilibrio ora è {16; 5}.

Il paese A nella prima fase del gioco fa saltare in aria il ponte (gioca aggressivo), questo fa sì che il paese B giocherà passivo nella seconda fase in modo da massimizzare il suo payoff, che però risulta più basso di quelle se A avesse giocato in modo leale.

Paese B ▶ Paese A ▼	**Aggressivo**	**Passivo**
Aggressivo	12; 4	16; 5
Passivo	15; 7	18; 6

Tabella 2.5

Per verificare se l'impegno ha valore bisogna confrontare l'effetto diretto (da 15 a 12 = -3) con quello indiretto (da 12 a 16 = +4). L'effetto indiretto è più grande di quello diretto, quindi l'impegno strategico vincolante ha valore.

L'impegno strategico vincolante è utilizzato in tantissimi scenari, l'economia industriale ci porta alcuni esempi.

[35] Tecnica impiegata per la prima volta da Von Neumann e Morgenstern nella loro *Game theory and economic behavior* (1944) che consiste nel ragionare andando indietro nel tempo: in primo luogo si considera l'ultima azione che si può scegliere e si individua la mossa ottimale, e poi si risale l'albero delle decisioni per individuare il percorso decisionale in cui ognuno massimizza il proprio risultato.

Un caso in cui il commitment è efficiente è rappresentato dal modello di gioco a due stadi di Stackelberg di monopolio[36], in cui nel primo stadio un'impresa B sceglie la quantità e nel secondo stadio tocca ad A sceglierla.

- Nel primo stadio l'impresa B decide di non scegliere la quantità ottimale del bene rappresentata dalla *figura 2.6*, ma si vincola optando per un quantitativo maggiore.
- In questo modo il profitto dell'impresa B si riduce in modo minimo, mentre il profitto di A scende in modo drastico come si vede nella *figura 2.7*.

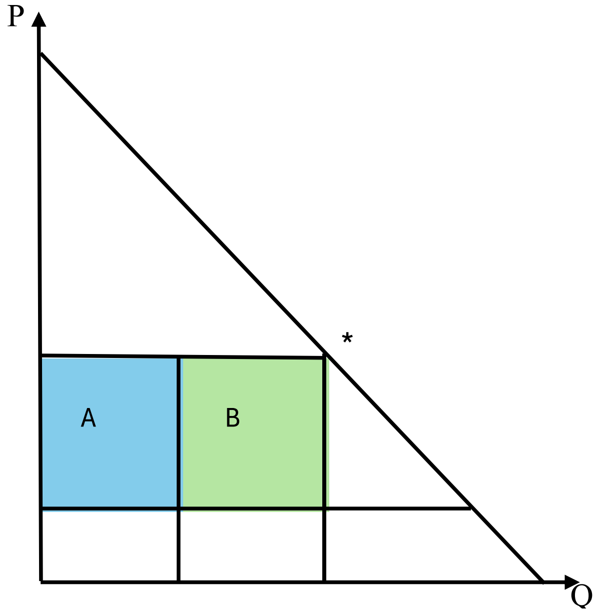

Figura 2.6: equilibrio di monopolio

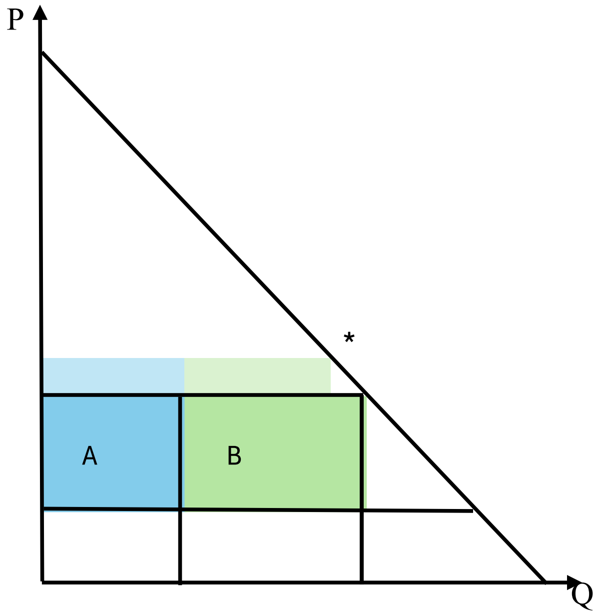

Figura 2.7: effetto diretto

- Questo induce una reazione da parte di A: andrà a diminuire la sua quantità in modo da aumentare i prezzi *(figura 2.8)*.
- La quantità di B non cambia rispetto a quella che ha scelto nel primo stadio, ma i prezzi sono aumentati, ne consegue che il profitto aumenta.

[36] G. F. Von Stackelberg (1905-1946) è un economista tedesco conosciuto soprattutto per il modello di monopolio.

Q

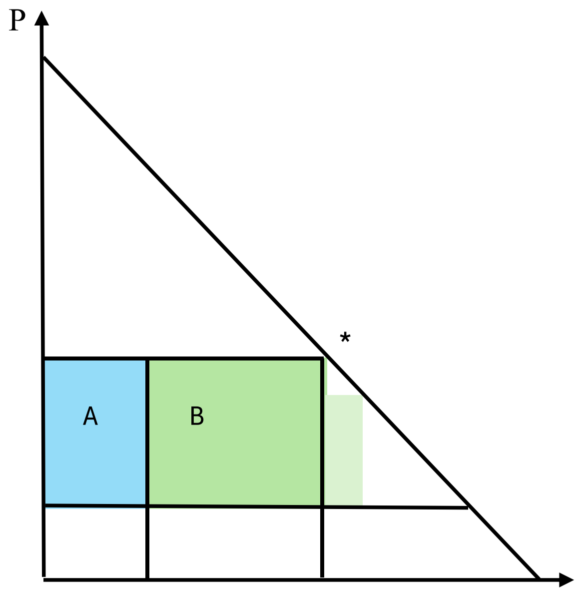

Figura 2.8: effetto indiretto

In questo caso il commitment ha valore perché l'effetto indiretto è maggiore del diretto.

Invece, il modello già citato di Hotelling ci permette di distinguere un caso in cui il commitment non ha valore. Ipotizziamo la spiaggia di prima come un gioco a due stadi; nel primo si sceglie la localizzazione e nel secondo le due imprese competono sul prezzo.
Abbiamo già detto che il caso in cui i due gelatai facciano i propri interessi, posizionandosi al centro, non consiste in un ottimo sociale. Questo è anche spiegato da fatto che l'impegno strategico, rappresentato dallo spostamento verso la metà della spiaggia, non restituisce un effetto indiretto maggiore di quello diretto.
Un ulteriore modo di pensare questo modello è considerare un bene, ad esempio un cellulare, e vedere la spiaggia di Hotelling come la traduzione fisica di tutte le caratteristiche che questo può avere. Possiamo ipotizzare che da un lato avremo chi è più interessato alla memoria del telefono e dall'altro chi apprezza maggiormente le prestazioni fotografiche. Supponendo che entrambe le imprese si ritrovino al centro, questo implica che i cellulari di A e di B siano uguali identici nelle caratteristiche e, di conseguenza, che l'unico modo possibile di farsi concorrenza è ingaggiare una guerra dei prezzi.
Evidentemente, è un risultato che nessuna delle due imprese vuole raggiungere, quindi, né A, né B opteranno per vincolarsi.

Capitolo tre
Le leggi elettorali

Avendo analizzato in modo approfondito la teoria dell'impossibilità di Arrow, viene spontaneo ora focalizzarsi sui vari metodi di elezioni e studiare i limiti che ognuno di questi presenta.
Le varie leggi elettorali si dividono in tre macrocategorie: il sistema maggioritario, il sistema proporzionale e quelli misti. Ognuno di questi, poi, dispone di diverse varianti in base agli obiettivi che si vogliono raggiungere.
In questo capitolo andremo a focalizzarci sui sistemi proporzionali e maggioritari, evidenziando i punti di forza e di debolezza di ognuno.
In particolare, l'obiettivo dei modelli è quello di trovare dei criteri equi, vale a dire che permettano di rappresentare al meglio i cittadini e le loro ideologie.
All'interno del sistema proporzionale, andremo a studiare le modalità di ripartizione dei seggi all'interno del parlamento, i risultati che otterremo da questo studio sono coerenti con la difficoltà incontrata finora di aggregare le preferenze individuali.
Per il sistema maggioritario, invece, l'analisi si concentrerà sulle elezioni presidenziali americane.

3.1 Il Sistema proporzionale

Il metodo proporzionale è il metodo utilizzato oggi in diversi stati; negli Stati Uniti d'America, per esempio, viene utilizzato per definire il numero di rappresentanti di ogni stato nel Parlamento[37]. La storia dei sistemi elettorali in questo paese è una storia burrascosa che comincia nel momento della redazione della Costituzione nel 1787, nella quale viene indicato che deve esserci almeno un rappresentante ogni 30.000 cittadini e nessuno stato può ritrovarsi senza seggi per rispettare il criterio di equità di rappresentazione.
Ricostruendo la loro storia e le problematiche a cui hanno dovuto rispondere, andremo ad analizzare il sistema proporzionale in tutte le sue forme.

Il sistema proporzionale si impone di assegnare a ciascun partito un numero di seggi in modo proporzionale ai voti ricevuti.

[37] Il parlamento americano è il Congresso degli Stati Uniti d'America.

3.1.1 Dal 1790 al 1910

La Costituzione americana prevede inoltre un censimento ogni dieci anni per verificare l'incremento e il numero della popolazione. Secondo il censimento del 1790 gli Stati Uniti d'America contavano 3.615.920 abitanti, utilizzando come divisore il numero stabilito dalla Costituzione (30.000), fu deciso che 120 seggi avrebbero fatto parte del Congresso.

Fu il primo Segretario del Tesoro, Alexander Hamilton[38], a proporre un metodo per ripartire i seggi tra i vari stati. Il presidente del tempo, George Washington[39], dopo una lunga e attenta analisi, annunciò il veto al disegno di legge; fu il primo veto della storia americana.

Andiamo ora ad analizzare le caratteristiche di questo metodo, in modo da capire le ragioni dietro il veto.

- **Metodo Hamilton**

Il metodo Hamilton, in un primo luogo assegnava ad ognuno un numero di seggi pari alla *quota* arrotondata per difetto, in un secondo momento andava poi a ripartire i seggi rimanenti a coloro che avevano la parte decimale più alta.

Quota = $\frac{popolazione\ stato}{divisore}$

Divisore = $\frac{popolazione\ USA}{numero\ di\ seggi}$

Esempio 3.1 (Metodo Hamilton)

Stato	Popolazione	Quota	Parte decimale	Seggi primo turno	Seggi aggiuntivi	Tot seggi
Vermont	85.533	2,839	**0,851**	2	1	3
New Hampshire	141.822	4,727	**0,727**	4	1	5
Massachusetts	475.327	15,844	**0,844**	15	1	16
Rhode Island	68.446	2,282	0,282	2		2
Connecticut	236.841	7,895	**0,895**	7	1	8
New York	331.589	11,053	0,053	11		11
New Jersey	179.570	5,986	**0,986**	5	1	6
Pennsylvenia	432.879	14,429	0,429	14		14
Delaware	55.540	1,851	**0,851**	1	1	2
Maryland	278.514	9,284	0,284	9		9
Virginia	630.560	21,019	0,019	21		21
Kentucky	68.705	2,290	0,290	2		2

Tabella 3.1[40]

[38] A. Hamilton (1755-1804) politico ed economista statunitense. Il suo volto è ritratto sulla banconota da dieci dollari.
[39] G. Washington (1732-1799) primo presidente degli Stati Uniti d'America.
[40] I dati originali di tutte le tabelle derivano dall'appendice del libro *Fair Rapresentation (Balinski, Young)*, i calcoli sono tutti frutto del mio lavoro.

North Carolina	353.523	11,784	**0,784**	11	1	12
South Carolina	206.236	6,875	**0,875**	6	1	7
Georgia	70.835	2,361	0,361	2		2
Tot	**3.615.920**			**112**	**8**	**120**

Tabella 3.1 (continuo)

Inizialmente ogni stato ottiene tanti seggi quanto la parte intera della quota, vediamo che nella *tabella 3.1* questi rappresentano 112 seggi. Gli otto rimanenti vengono distribuiti a coloro che hanno la parte decimale più alta, in questo caso Vermont, New Hampshire, Massachusetts, Connecticut, New Jersey, Delaware, North e South Carolina.

Una prima ragione del veto di Washington risiede nella sua provenienza: il presidente era originario della Virginia; stato con la più alta popolazione, a cui, però, non sarebbe stato assegnato un seggio aggiuntivo. Anche il suo più stretto consigliere, Thomas Jefferson[41], proveniva dallo stesso stato.

In più, gli oppositori sostenevano che arrotondare per eccesso la quota di solo alcuni stati fosse incostituzionale e iniquo; infatti, queste delegazioni avrebbero ottenuto più di un rappresentante ogni 30.000 abitanti.

In particolare, quest'ultima ragione era molto forte e il presidente non volle schierarcisi contro. Questo metodo fu riproposto nel 1850[42], con un cambio di nome e fu approvato. Purtroppo, Hamilton non era più vivo in quanto ucciso nel 1804 dall'allora vicepresidente degli Stati Uniti, Aaron Burr, che lo aveva sfidato a duello.

Fino al 1880 tutto sembrava proseguire al meglio; ogni dieci anni si aumentava il numero di seggi per assecondare l'incremento della popolazione e il metodo Hamilton sembrava non avere problemi. Eppure, la catastrofe era dietro l'angolo; dopo il censimento del 1880 gli studiosi dei sistemi elettorali si trovarono di fronte al paradosso dell'Alabama.

Oltre a questo, due sono gli ulteriori paradossi che il metodo Hamilton implica.

[41] T. Jefferson (1743-1826) terzo presidente degli Stati Uniti d'America, Segretario di Stato durante il mandato di Washington.

[42] Viene riproposto da Samuel F. Vinton (1792-1862), al tempo Rappresentante alla Camera dell'Ohio.

Esempio 3.2 (Paradosso dell'Alabama 1880)

Stato	Popolazione	Quota 299	Quota 300	Seggi 299	Seggi 300
Illinois	3.077.871	18,640	**18,702**	18	19
Texas	1.591.749	9,640	**9,672**	9	10
Alabama	1.262.505	**7,646**	7,671	8	7
Tot	**49.371.340**			**299**	**300**
Divisore		**165.121,54**	**164.571,13**		

Tabella 3.2

Si decise di studiare il comportamento del metodo Hamilton con un numero di seggi compreso tra 275 e 350.

Quello che si nota è che l'Alabama con 299 seggi avrebbe ottenuto 8 seggi, tuttavia, alzando il numero a 300, solamente 7. In più, Illinois e Texas ne avrebbero guadagnano uno ciascuno. Ed ecco uno dei motivi per cui questo metodo è imperfetto; non è equo che l'aumento del numero di seggi ne faccia perdere uno a qualcuno.

Per non scontentare nessuno, fu deciso di portare il numero di seggi a 325 dove non si verificava questo problema.

Anche negli anni successivi fu rispettata la tradizione di aumentare il numero di seggi.

Nel 1890, in particolare, i seggi erano 356, e questo numero non proponeva nessun problema. Dieci anni più tardi, nel 1900, bisogna aumentare di nuovo i seggi per rispondere all'aumento della popolazione e quello che si verifica è che solo nell'eventualità si fosse scelto un numero di seggi pari a 357 si sarebbe presentato di nuovo il paradosso dell'Alabama, ma questa volta per Maine e Colorado. Ovviamente il presidente del comitato, che evidentemente non portava molta simpatia per questi stati, opta proprio per 357 seggi.

Tuttavia, quello che era sfuggito a tutti era un problema gravissimo: il paradosso della popolazione.

Esempio 3.3 (Paradosso della popolazione 1900)

Stato	1900	Crescita annuale	1901	Quota 1900	Quota 1901	Tot 1900	Tot 1901
Maine	694.466	0,63%	698.822	3,595	3,566	3	4
Virginia	1.854.184	0,96%	1.872.045	9,599	9,554	10	9
Tot	**74.562.608**		**75.634.069**			**386**	**386**
Divisore	**193.167**		**195.943**			**-**	**-**

Tabella 3.3: è già stato menzionato il fatto che i censimenti venivano effettuati ogni dieci anni, questo implica che non sono disponibili dati per il 1901. Per ottenere quei dati ho quindi stimato la crescita decennale (dal 1901 al 1910) e l'ho poi convertita in crescita annuale. A quel punto ho potuto calcolare la popolazione del 1901.

Come si può ben vedere da questa tabella, dal 1900 al 1901 la popolazione è aumentata sia in Virginia (+19.789 unità), sia nel Maine (+4.649 unità). Nonostante sia cresciuta di più in Virginia, quest'ultima perde un seggio a favore del Maine.

Il metodo Hamilton comporta un ulteriore problema e ancora più grande del paradosso dell'Alabama; infatti, se il numero dei seggi è manovrabile (o addirittura si può decidere di non toccarlo), fermare la crescita della popolazione è qualcosa di molto difficile da fare – e davvero qualcosa che si desidera?

Tuttavia, i paradossi non finiscono qua. Nel 1907 ne viene scoperto un ultimo: il paradosso del nuovo stato.

Esempio 3.4 (Paradosso del nuovo stato 1907)

Stato	Senza Oklahoma	Con Oklahoma	Quota senza	Quota con Oklahoma	Seggi senza Oklahoma	Seggi con Oklahoma
Maine	694.466	694.466	3,614	**3,594**	3	4
New York	7.264.183	7.264.183	**37,804**	37,589	38	37
Oklahoma	-	1.000.000	-	5,175	-	5
Tot	**74.171.970**	**75.562.608**			**386**	**391**
Divisore	**192.155**	**193.255**				

Tabella 3.4

L'Oklahoma entra a fare parte degli Stati Uniti d'America nel 1907. Fino alla ripartizione precedente (1900) i seggi erano 386; su una popolazione totale di 74.562.608, questi implicavano un divisore di 193.167. Considerando che la popolazione dell'Oklahoma era intorno al milione, aveva diritto a circa cinque seggi. I seggi totale diventano quindi 391.

Logicamente, si pensava che aggiungendo ai calcoli l'Oklahoma e i cinque seggi, questi sarebbero andati al nuovo stato e gli altri non avrebbero visto differenze. Sì e no. Sì, l'Oklahoma guadagna cinque seggi, no, alcuni tra gli altri stati videro i loro seggi cambiare.

Nel dettaglio, il Maine guadagnava un seggio a discapito dello stato di New York che ne perdeva uno.

Concludendo, il sistema di Hamilton riporta tutta una serie di paradossi che, utilizzando altri metodi, potrebbero essere evitati. Andremo ora a dimostrare che un'equa ripartizione dei seggi del Congresso risulta matematicamente impossibile[43], e la cosa a questo punto non dovrebbe sorprenderci.
Per fare ciò, proseguiremo con l'analisi della storia americana.

3.1.2 Dal 1910 al 1950

- **I metodi W-W e H-H**

Nel 1910 il nuovo censimento dimostrò come la popolazione fosse passata da 75 a 91 milioni, a questo punto i dati iniziavano davvero ad essere difficili da gestire.
I seggi vennero ulteriormente aumentati, questa volta a 433, più uno per l'Arizona e uno per il New Mexico quando si sarebbero uniti. Questo accadde nel 1912 e da allora il numero dei seggi non fu più toccato (435).
Nell'ultima ripartizione il metodo in vigore era quello Webster, che lo propose una prima volta nel 1842, sopravvivendo solo fino al 1850[44]. Questo metodo, che consisteva semplicemente nell'arrotondare la quota al valore più vicino, era in grado di evitare i paradossi e non favoriva né i grandi né i piccoli stati e per questo era particolarmente apprezzato da Willcox[45] che lo riportò in auge nel 1910. Dal nome dei suoi più accaniti sostenitori questo metodo viene ricordato come metodo W-W.
Le grandi menti economiste erano già al lavoro per studiare come affrontare la ripartizione nel 1920 e per decidere se adottare il sistema Webster definitivamente. Ovviamente, la risposta a questa seconda parte è no e viene offerta da Joseph Hill[46].
Joseph A. Hill, capo dell'ufficio statistico della Divisione Revisione e Risultati, era convinto che il metodo Webster non fosse equo, quindi provò a idearne uno nuovo. Il suo lavoro iniziò chiedendosi quanti elettori fossero necessari per eleggere un deputato; l'obiettivo era quello di trovare una ripartizione per cui, confrontando tutti gli stati, la differenza del numero di elettori necessari fosse la più piccola possibile.

[43] Szpiro, G. G. (2013), *Matematica della democrazia*, cap. 12 cit.
[44] D. Webster (1782-1852): avvocato americano e senatore degli Stati Uniti d'America.
[45] W. F. Willcox (1861-1964): esperto di statistica e professore di economia all'Università di Cornell.
[46] J. A. Hill (1860-1938): statistico statunitense.

Andiamo ora a vedere un esempio che riporta un possibile problema del metodo Webster e il sistema elaborato da Hill, che fu poi appoggiato da Edward V. Huntington[47], diventando così il metodo H-H.

Esempio 3.5 (Il metodo H-H e W-W a confronto)
Ipotizziamo di avere una situazione in cui ogni singola quota restituisce un valore "virgola 5". Il metodo W-W andrebbe in crisi in quanto non saprebbe come arrotondare o, volendo arrotondare tutti in eccesso, come suggerisce la teoria matematica, vedrebbe un numero di seggi più alto di quelli a disposizione.
Nella tabella seguente, in cui i dati sono una manipolazione della *tabella 3.1*, possiamo vedere come il metodo H-H indicherebbe come scelta preferita l'opzione della *tabella 3.5*, poiché restituisce una differenza nel numero di elettori minore.

Stato	Popolazione	Opzione uno			
		Quota	Seggi tot	Cittadini/ seggio	Differenza
Vermont	75.000	2,500	3	25.000	17,79%
New Hampshire	135.000	4,500	5	27.000	11,21%
Massachusetts	465.000	15,500	16	29.063	4,43%
Rhode Island	75.000	2,500	2	37.500	18,91%
Connecticut	225.000	7,500	8	28.125	7,51%
New York	345.000	11,500	11	31.364	3,05%
New Jersey	165.000	5,500	6	27.500	9,56%
Pennsylvenia	435.000	14,500	14	31.071	2,13%
Delaware	45.000	1,500	2	22.500	26,01%
Maryland	285.000	9,500	9	31.667	3,97%
Virginia	645.000	21,500	21	30.714	1,00%
Kentucky	75.000	2,500	2	37.500	18,91%
Carolina	555.000	18,500	19	29.211	3,94%
Georgia	75.000	2,500	2	37.500	18,91%
Tot	**3.600.000**		**120**	**30.408**	**10,52%**

Tabella 3.5: le quote sono state arrotondate in maniera aleatoria

[47] E. Huntington (1874-1952): matematico statunitense con un particolare interesse per la statistica. Nel dettaglio, durante la Prima guerra mondiale si occupò di problemi statistici per le forze armate.

Stato	Popolazione	Opzione due				
		Quota	Seggi tot	Cittadini/ seggio	Differenza	
Vermont	75.000	2,500	2	37.500	17,37%
New Hampshire	135.000	4,500	4	33.750	8,19%
Massachusetts	465.000	15,500	15	31.000	0,05%
Rhode Island	75.000	2,500	3	25.000	19,32%
Connecticut	225.000	7,500	7	32.143	3,60%
New York	345.000	11,500	12	28.750	7,21%
New Jersey	165.000	5,500	5	33.000	6,11%
Pennsylvenia	435.000	14,500	15	29.000	6,41%
Delaware	45.000	1,500	1	45.000	31,14%
Maryland	285.000	9,500	10	28.500	8,02%
Virginia	645.000	21,500	22	29.318	5,38%
Kentucky	75.000	2,500	3	25.000	19,32%
Carolina	555.000	18,500	18	30.833	0,49%
Georgia	75.000	2,500	3	25.000	19,32%
Tot	**3.600.000**		**120**	**30.985**	**10,85%**

Tabella 3.6

Tuttavia, per poter affermare con sicurezza che questa è l'opzione in cui i seggi vengono distribuiti in maniera più efficiente ed equa[48] possibile, andrebbero testate tutte le combinazioni di ripartizione che danno come somma 120 seggi.

Esempio 3.6 (Metodo H-H)

Hill indica un sistema per identificare immediatamente la combinazione ideale, e questo implica l'utilizzo della media geometrica. In ogni turno si calcola il rapporto tra la popolazione e la media geometrica ($\sqrt{n(n+1)}$; dove n indica il numero di seggi che quello stato possiede fino a quel momento). Una volta ottenuti tutti i risultati, i seggi vengono assegnati, uno alla volta fino a esaurimento, agli stati con i valori più alti.

$$\frac{P}{\sqrt{n(n+1)}}$$

[48] Dove con efficiente ed equa si intende la ripartizione che restituisce la più piccola differenza rispetto al numero di cittadini necessari per eleggere un seggio.

Stato	Popolazione	1^ turno	2^ turno	3^ turno	4^ turno	5^ turno	6^ turno
Vermont	75.000	53.033,01	30.618,62	21.650,64	16.770,51	13.693,06	11.572,75
New Hampshire	135.000	95.459,42	55.113,52	38.971,14	30.186,92	24.647,52	20.830,95
Massachusetts	465.000	328.804,65	189.835,46	134.233,94	103.977,16	84.897,00	71.751,06
Rhode Island	75.000	53.033,01	30.618,62	21.650,64	16.770,51	13.693,06	11.572,75
Connecticut	225.000	159.099,03	91.855,87	64.951,91	50.311,53	41.079,19	34.718,25
New York	345.000	243.951,84	140.845,66	99.592,92	77.144,35	62.988,09	53.234,66
New Jersey	165.000	116.672,62	67.360,97	47.631,40	36.895,12	30.124,74	25.460,05
Pennsylvenia	435.000	307.591,45	177.588,01	125.573,68	97.268,96	79.419,77	67.121,96
Delaware	45.000	31.819,81	18.371,17	12.990,38	10.062,31	8.215,84	6.943,65
Maryland	285.000	201.525,43	116.350,76	82.272,41	63.727,94	52.033,64	43.976,45
Virginia	645.000	456.083,87	263.320,15	186.195,46	144.226,38	117.760,35	99.525,66
Kentucky	75.000	53.033,01	30.618,62	21.650,64	16.770,51	13.693,06	11.572,75
Carolina	555.000	392.444,26	226.577,80	160.214,70	124.101,77	101.328,67	85.638,36
Georgia	75.000	53.033,01	30.618,62	21.650,64	16.770,51	13.693,06	11.572,75
Tot	**3.600.000**						

Tabella 3.7

Stato	7^ turno	8^ turno	9^ turno	10^ turno	11^ turno	12^ turno	13^ turno
Vermont	10.022,30	8.838,83	7.905,69	7.150,97	6.527,91	6.004,81	5.559,37
New Hampshire	18.040,13	15.909,90	14.230,25	12.871,74	11.750,24	10.808,65	10.006,87
Massachusetts	62.138,24	54.800,78	49.015,30	44.336,01	40.473,06	37.229,80	34.468,09
Rhode Island	10.022,30	8.838,83	7.905,69	7.150,97	6.527,91	6.004,81	5.559,37
Connecticut	30.066,89	26.516,50	23.717,08	21.452,91	19.583,74	18.014,42	16.678,11
New York	46.102,56	40.658,64	36.366,19	32.894,46	30.028,40	27.622,11	25.573,10
New Jersey	22.049,05	19.445,44	17.392,53	15.732,13	14.361,41	13.210,57	12.230,61
Pennsylvenia	58.129,32	51.265,24	45.853,03	41.475,62	37.861,89	34.827,87	32.244,35
Delaware	6.013,38	5.303,30	4.743,42	4.290,58	3.916,75	3.602,88	3.335,62
Maryland	38.084,73	33.587,57	30.041,64	27.173,68	24.806,07	22.818,26	21.125,61
Virginia	86.191,75	76.013,98	67.988,97	61.498,34	56.140,04	51.641,33	47.810,58
Kentucky	10.022,30	8.838,83	7.905,69	7.150,97	6.527,91	6.004,81	5.559,37
Carolina	74.164,99	65.407,38	58.502,14	52.917,17	48.306,55	44.435,56	41.139,34
Georgia	10.022,30	8.838,83	7.905,69	7.150,97	6.527,91	6.004,81	5.559,37

Tabella 3.7 (continuo)

Stato	14^ turno	15^ turno	16^ turno	17^ turno	18^ turno	19^ turno	20^ turno
Vermont	5.175,49	4.841,23	4.547,54	4.287,46	4.055,54	3.847,42	3.659,63
New Hampshire	9.315,89	8.714,21	8.185,58	7.717,44	7.299,96	6.925,35	6.587,33
Massachusetts	32.088,05	30.015,62	28.194,77	26.582,28	25.144,32	23.854,00	22.689,68
Rhode Island	5.175,49	4.841,23	4.547,54	4.287,46	4.055,54	3.847,42	3.659,63
Connecticut	15.526,48	14.523,69	13.642,63	12.862,39	12.166,61	11.542,26	10.978,88
New York	23.807,26	22.269,65	20.918,70	19.722,34	18.655,46	17.698,13	16.834,28
New Jersey	11.386,08	10.650,70	10.004,59	9.432,42	8.922,18	8.464,32	8.051,18
Pennsylvenia	30.017,85	28.079,13	26.375,75	24.867,29	23.522,11	22.315,03	21.225,83
Delaware	3.105,30	2.904,74	2.728,53	2.572,48	2.433,32	2.308,45	2.195,78

Tabella 3.7(continuo)

Maryland	19.666,87	18.396,67	17.280,66	16.292,37	15.411,04	14.620,19	13.906,58
Virginia	44.509,23	41.634,57	39.108,87	36.872,20	34.877,61	33.087,80	31.472,78
Kentucky	5.175,49	4.841,23	4.547,54	4.287,46	4.055,54	3.847,42	3.659,63
Carolina	38.298,64	35.825,10	33.651,82	31.727,24	30.010,96	28.470,90	27.081,23
Georgia	5.175,49	4.841,23	4.547,54	4.287,46	4.055,54	3.847,42	3.659,63

Tabella 3.7(continuo)

Per realizzare questo calcolo, andrebbero presi in considerazione 120 turni di elezione, tuttavia, ho inizialmente considerato di avere solo 50 turni, e i seggi in quel caso sarebbero quelli in arancione. Ho poi supposto, a ragione, che avrei potuto utilizzare la stessa tabella anche per 120 seggi (infatti, non solo sono superflui i dati del 120º turno, ma addirittura i seggi si esauriscono entro il 20º). In questo caso la ripartizione dei seggi è rappresentata dalla somma delle celle in arancione e in blu.

Vediamo che questo metodo ci restituisce un'allocazione come quella della *tabella 3.8*.

A dimostrazione del fatto che questa è l'allocazione più efficiente, possiamo constatare che la differenza è del solo 10,04%.

Stato	**Popolazione**	**Metodo H-H**			
		Quota	**Seggi tot**	**Cittadini/ seggio**	**Differenza**
Vermont	75.000	2,5	3	25.000	11,57%
New Hampshire	135.000	4,5	5	27.000	4,50%
Massachusetts	465.000	15,5	15	31.000	8,80%
Rhode Island	75.000	2,5	3	25.000	11,57%
Connecticut	225.000	7,5	7	32.143	12,05%
New York	345.000	11,5	11	31.364	9,86%
New Jersey	165.000	5,5	6	27.500	2,73%
Pennsylvenia	435.000	14,5	14	31.071	9,01%
Delaware	45.000	1,5	2	22.500	20,41%
Maryland	285.000	9,5	9	31.667	10,72%
Virginia	645.000	21,5	21	30.714	7,96%
Kentucky	75.000	2,5	3	25.000	11,57%
Carolina	555.000	18,5	18	30.833	8,31%
Georgia	75.000	2,5	3	25.000	11,57%
Tot	**3.600.000**		**120**	**28.271**	**10,04%**

Tabella 3.8

In conclusione, il metodo W-W era più facile da spiegare e più intuitivo, però matematicamente era preferito il metodo H-H, perché permetteva di ridurre le differenze.

Quale fu la decisione presa?

Inizialmente si valutò di aumentare il numero di seggi a 483, ma questa proposta fu bocciata. Fu poi suggerito di mantenere il metodo Webster e lo stesso numero di seggi, ma anche in questo caso il Congresso bloccò l'iniziativa. Ci si ritrovò davanti una situazione di stallo.
Si decise, allora, di non decidere e furono mantenute le stesse ripartizioni, con lo stesso numero di seggi, del 1910.
Durante il decennio 1920-1930 l'America vide un assaggio di guerra fredda tra Willcox e Huntington; entrambi desideravano ardentemente il proprio metodo per la successiva ripartizione e ciascuno era convinto che il proprio sistema rappresentasse il meglio per il Paese. Gli attacchi si fecero sempre più forti, arrivando anche ad essere di tipo personale; per mettere fine a questa lite, il Congresso affidò il compito di trovare una soluzione all'Accademia Nazionale delle Scienze[49]. Venne formata una squadra di attacco formata da G.A Buss, E.W. Brown, L.P. Eisenhart e Reymond Pearl, forse oggi questi nomi non ci dicono molto, ma al tempo rappresentavano l'élite in ambito matematico. L'Accademia approvò il metodo H-H.
Tuttavia, nel 1929 il Congresso non aveva ancora preso ufficialmente nessuna decisione, quindi si pensò di approvare una legge che prevedeva che l'ufficio censimento avrebbe dovuto inviare i risultati del censimento e un'elaborazione dei dati con entrambi i metodi. A quel punto la decisione sarebbe stata in mano del Congresso che, se non fosse riuscito a pronunciarsi, avrebbe riutilizzato la tecnica W-W come nel 1910. Il risultato fu il migliore immaginabile: i due metodi concordavano. Nel 1930, quindi, tutto fluì serenamente.
Dieci anni dopo la situazione non fu altrettante rosea; attraverso il metodo H-H l'Arkansas avrebbe ottenuto 7 seggi e il Michigan 17, mentre il sistema elettorale W-W avrebbe assegnato 6 seggi all'Arkansas e 18 al Michigan. In più, il primo era uno stato storicamente democratico, mentre il secondo repubblicano. Fu così che questa disputa si trasformò in una lotta tra partiti. A questo punto il presidente era Roosevelt[50] che optò proprio, casualmente, per il metodo che avrebbe favorito l'Arkansas.
Nel 1948 l'America si ritrova nuovamente in una situazione di crisi riguardo al metodo di ripartizione dei seggi, venne pensato di convocare nuovamente una commissione del NAS (National Accademy of Science), questa volta con a capo Von Neumann (che abbiamo già avuto il piacere di conoscere) affiancato da Morse[51] e, nuovamente, Eisenhart. Questi tre confermano il giudizio che aveva dato la prima commissione: il metodo H-H è quello più equo.

[49] L'accademia nazionale delle scienze (NAS) è un'organizzazione non governativa statunitense. Si occupa di consigliare riguardo le scienze, l'ingegneria e la medicina.
[50] F. D. Roosevelt (1882-1945): 32° presidente degli Stati Uniti d'America dal 1933 al 1945 (democratico)
[51] M. Morse (1892-1977): matematico statunitense conosciuto per la teoria di Morse riguardante lo studio delle forme.

3.1.3 Dal 1950 ad oggi

Avendo fissato il numero di rappresentanti, il paradosso dell'Alabama non rappresentava più un problema. Anche il paradosso della popolazione era scongiurato grazie al numero di stati che non era destinato a crescere. L'unico problema che non si era riusciti a risolvere era il paradosso della popolazione.

La situazione era tutt'altro che risolta: ogni dieci anni qualche stato guadagnava seggi a scapito di altri che ne perdevano e, di conseguenza, i dibattiti erano acerbi e non portavano mai a nulla. Era giunta l'ora di mettere la parola fine a questa storia.

Nel 1969, all'Università di New York, M.L. Balinski[52] assume la cattedra di un corso di matematica, l'obiettivo era quello di offrire un assaggio del mondo matematico a studenti non di matematica. Decise di basare il corso sulle modalità di nomina delle cariche del Congresso in modo da coinvolgere giovani menti non particolarmente affascinate dall'ambito scientifico. Per prepararsi alle lezioni dovette fare studi approfonditi sulla storia americana in rapporto alle modalità di ripartizione dei seggi e le problematiche affrontate- un po' come stiamo facendo in questa tesi-, fu così che si convinse di voler trovare il metodo più equo utilizzando un approccio matematico. A tal fine reclutò Peyton Young[53].

Questa collaborazione portò alla redazione del libro *Fair representation: meeting the ideal of one man, one vote* (1982); unico libro di matematica mai entrato all'interno della Corte Suprema degli Stati Uniti.

- **Teorema Balinski Young**

Per affrontare il problema seguirono l'approccio di Arrow, evidenziarono innanzitutto degli assiomi che ogni metodo avrebbe dovuto rispettare, per poi confrontare, in una seconda fase, tutti i metodi a loro conoscenza.

Criterio 3.1 (Proporzionalità)

Ogni stato deve avere un numero di seggi proporzionale alla sua grandezza: uno stato tre volte più grande di un altro vedrà un numero tre volte più grande di seggi rispetto all'altro.

Questo criterio vuole escludere il paradosso della popolazione e va a scartare già il metodo Hamilton, mentre accetta i metodi Hill e Webster.

---

[52] M. L. Balinski (1933-2019): matematico applicato, economista, analista della ricerca operativa e scienziato politico. Conosciuto soprattutto per gli studi di ottimizzazione.

[53] H. P. Young (1945-): economista esperto di teoria dei giochi e ha contribuito ad alcune delle più recenti teorie di questa branca (gioco stocastico, valore di Shapley per citarne alcuni)

Criterio 3.2 (Mancanza di squilibri tra stati)

Il metodo ideale non deve avere una tendenza sistematica a favorire sempre gli stati grandi o quelli piccoli. Il metodo vincitore secondo questo criterio risulta il Webster.

Tuttavia, Balinski e Young inseriscono un ulteriore criterio che il metodo perfetto deve soddisfare:

Criterio 3.3 (Giusta quota)

Tutti gli stati devono ricevere un numero di seggi all'interno della "giusta quota", cioè non possono ricevere meno di ciò che è l'intero della quota, ma neanche più dell'intero della quota + 1.

Questo criterio è soddisfatto dal metodo Hamilton, tuttavia non da quello Hill o dal Webster.

Teorema 3.1 (Teorema di Balinski e Young)

Non esiste un'equa ripartizione dei seggi al Congresso che rispetti i criteri di proporzionalità, equità e giusta quota.

Gli Stati Uniti d'America hanno visto l'ultimo censimento nel 2020, con una popolazione totale di 331.449.281. L'ultima elezione dei rappresentanti è stata quella del 2022, in cui i 435 seggi sono stati ripartiti secondo il metodo H-H. Oggi i rappresentanti sono composti da 220 repubblicani, 213 democratici e due vacanti da aprile 2024.

A novembre 2024, in concomitanza alle elezioni presidenziali, si andrà a votare nuovamente per i membri della camera.

3.2 Il sistema maggioritario

Gli Stati Unti d'America ci vengono in aiuto anche per l'analisi del sistema maggioritario. Innanzitutto, andiamo a descrivere come si svolgono le elezioni presidenziali in America.

Le elezioni sono materia statale, ogni stato concorre alle votazioni in base al peso attribuitogli. Questi pesi sono rappresentati dai grandi elettori; logicamente, gli stati popolosi hanno diritto a più grandi elettori e gli stati più piccoli viceversa.

I grandi elettori sono lo stesso numero del Congresso: 538 di cui 100 sono senatori (due per ogni stato), 435 rappresentanti (coloro di cui abbiamo parlato finora, ed ecco perché era così importante parlarne) e tre sono i rappresentanti del District of Columbia (si decise di voler lasciare fuori da ogni stato la capitale federale).

I cittadini durante l*'election day*[54] votano per il candidato che preferiscono, ma non si tratta di un'elezione diretta. Infatti, chi si reca alle urne è vero che esprimerà una preferenza per il candidato eletto alla carica presidenziale, ma quei voti varranno per eleggere i grandi elettori e saranno poi loro a votare direttamente per il presidente. Per esempio, in Texas i grandi elettori sono 38; sia Biden, sia Trump andranno a indicare 38 elettori fedeli a loro e chiunque vincerà in quello stato, verosimilmente Trump, otterrà i 38 grandi elettori che poi, ovviamente, andranno a votare per il proprio candidato[55].

Il sistema maggioritario prevede che all'interno di ogni stato il candidato che ottiene la maggioranza, qualunque essa sia, ha diritto al totale dei voti (non in maniera proporzionale).

Questo metodo non assicura che la maggioranza sia in mano al partito/candidato che ha ottenuto più voti. L'esempio più celebre è quello delle elezioni presidenziali americane del 2016. Donald Trump conquistò 62.984.828 voti (46,1%), mentre Hillary Clinton 65.853.514 (48,2%), eppure il primo, con 304 seggi su 538, divenne presidente degli Stati Uniti d'America.

Questo deriva anche dalla forma dei collegi sindacali, nella *figura 3.1* possiamo verificare che in presenza di due partiti A e B e 50 elettori divisi 30 a favore di B e 20 a favore di A, nel primo caso (rettangolo centrale) con cinque circoscrizioni regolari, vince il partito B (6-4) in ogni circoscrizione. Nel secondo caso, invece (terzo rettangolo) le circoscrizioni vengono completamente mutate e quello che si verifica è che in tre di queste vince il partito A (6-4), mentre nelle due rimanenti vince B (9-1). Quindi riesce a vincere il partito A nonostante in totale abbia raccolto meno voti.

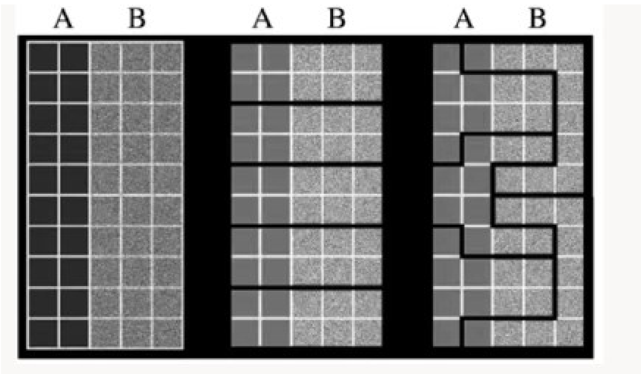

Figura 3.1: Palladino, D. (2023), I paradossi della democrazia

[54] L*'election day* ricorre il martedì successivo il primo lunedì di novembre (ogni quattro anni).

[55] I grandi elettori tecnicamente non hanno nessun obbligo di votare per il proprio candidato; tuttavia, non è mai successo che non lo abbiano fatto. In più, la Corte Suprema si è già pronunciata sul fatto che un simile comportamento sarebbe punito.

La pratica di ridisegnare i confini a proprio piacimento è nota con il nome di *gerrymandering*.

Nel 1812 il governatore dello Stato del Massachusetts Elbridge Gerry[56], volendo evitare a tutti i costi che i federalisti prendessero il controllo del Congresso, firmò una legge in cui andava a ridefinire i collegi sindacali; in particolare, l'attenzione era focalizzata sullo spezzettare le aree di dominio dei federalisti. Ne uscirono collegi di forme particolarmente bizzarre; ad esempio, un distretto del Massachusetts venne rappresentato da un vignettista di un giornale di Boston come un mostro mitologico compreso di testa, ali e zampe… Una sorta di salamandra o, meglio, una gerry-mandra.
Da qui questo fenomeno prende il nome, ancora oggi utilizzato, di *gerrymandering.*

Figura 3.2 Palladino, D. (2023), I paradossi della democrazia

Possiamo provare che un partito, per vincere le elezioni potendo manipolare la forma dei collegi sindacali, necessita del solo 25% dei voti totali. Infatti, vediamo che al crescere del numero di circoscrizione (m) e a quello dei votanti (n), il rapporto tra i voti necessari per vincere e i voti totali restituiscono un valore tendente a $\frac{1}{4}$. A prescindere che si consideri un caso con un numero pari o dispari di circoscrizioni e di votanti, il risultato sarà sempre lo stesso. Andrò a dimostrare il solo caso di circoscrizioni e votanti dispari.

[56] E. Gerry (1744-1814) politico statunitense, vicepresidente dal 1813 al 1814 (anno in cui morì). Viene ricordato soprattutto per aver dato inizio alla tecnica del *gerrymandering.*

Esempio 3.7 (Circoscrizioni dispari e votanti dispari)

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \frac{(m+1)(n+1)}{(2m+1)(2n+1)} =$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \frac{m\left(1+\frac{1}{m}\right)\cdot n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{m\left(2+\frac{1}{m}\right)\cdot n\left(2+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Ovviamente, questa pratica è stata circoscritta col passare degli anni; ci sono alcuni standard che devono essere rispettati in maniera assoluta. Alcuni di questi sono, ad esempio, che le circoscrizioni devono essere eque in termini di popolazione che rappresentano e che non devono discriminare le minoranze. Tuttavia, è ancora previsto che il partito al governo possa modificare i distretti elettorali.

Tesi conclusive

Questa tesi ha voluto ripercorrere la strada della teoria delle decisioni collettive; inizialmente è stato analizzato come vengono prese le decisioni a livello individuale da agenti razionali, per comprendere poi come vengono aggregate le preferenze di tanti "io" in un grande "noi". A questo proposito il risultato proposto da Arrow nel suo teorema non è stato positivo: è impossibile definire una decisione collettiva che non vada a violare delle semplici condizioni di buon senso. Attraverso questo teorema è stato possibile spiegare e comprendere meglio alcuni dei modelli più utilizzati in ambito economico, tra cui il dilemma del prigioniero.

Una volta applicato il teorema dell'impossibilità ai sistemi elettorali, il passo successivo è stato automatico: lo studio delle varie leggi elettorali.

Attraverso la storia degli Stati Uniti d'America, è stato possibile analizzare il sistema proporzionale esaminando le modalità di ripartizione dei seggi nel Congresso e vedere quali problematiche sono state incontrate e, soprattutto, come sono state risolte.

Le elezioni presidenziali americane, d'altro canto, ci hanno permesso di studiare il sistema maggioritario.

Le conseguenze che derivano dallo studio appena svolto sono molteplici e di differente natura. Innanzitutto, abbiamo scoperto che non esiste un metodo perfetto; sia il proporzionale, sia il maggioritario offrono problemi diversi. Il maggioritario ha causato il *gerrymandering,* un fenomeno, a mio avviso, molto problematico e che non concepisco come possa essere ancora oggi in vigore. In modo conseguente al fenomeno appena citato, questo metodo è oggettivamente ingiusto, perché permette che un candidato che ha ottenuto meno voti di un altro possa diventare presidente. Oltre a ciò, non riflette l'opinione pubblica e permette a chi disegna i collegi sindacali di emarginare minoranze etniche, vanificando totalmente il loro voto. La scelta della legge elettorale implica delle conseguenze a livello politico, per esempio sulle modalità di attuazione di campagna politica. Il metodo maggioritario fa sì che la campagna si concentri in quelle poche regioni in cui il destino non è chiaro; per buona parte degli stati è evidente quale candidato voterà, per esempio la California è sempre stata democratica e il Texas sarà sempre (o comunque ancora per molto tempo) dimora dei repubblicani. Nel 2024, per le elezioni di novembre, gli stati in bilico sono sette: Wisconsin, Michigan, Pennsylvania, Georgia, Arizona, Nevada e North Carolina. Spesso si sente chiamarli Swing States o Purple States (rosso-repubblicani più blu-democratici formano il viola). I candidati e i loro *surrogates*[57] si concentrano praticamente solo in questi territori, in particolare i tre decisivi sono

[57] Nome con cui ci si riferisce ai sostenitori dei candidati alle presidenziali.

Wisconsin, Michigan e Pennsylvania che insieme formano *The blue wall*[58]. Il destino americano, e di conseguenza mondiale, è in mano a questi tre stati.

La conseguenza di questa concentrazione delle campagne e di tutte le attenzioni a pochi stati implica che gli altri si sentano esclusi e decidano di non partecipare alle elezioni, rendendo il processo elettorale ancora più ingiusto.

Per quanto riguarda il sistema proporzionale, questo risolve alcune problematiche del sistema maggioritario e ne presenta delle altre.

Il vantaggio principale è che permette una rappresentazione più veritiera e corretta delle preferenze dell'elettorato. Tuttavia, negli anni ha causato il verificarsi di diversi paradossi e non si è ancora deciso quale sia la variante di questo metodo più equa.

I matematici del NAS erano troppo accecati dalle formule matematiche per accorgersi che il metodo Hill favorisce gli stati piccoli. Non dico che questo sia per forza un male, può avere un senso decidere di dare un piccolo vantaggio a questi ultimi in modo da prevenire il dominio degli stati più grandi, però non si può dire che è un metodo privo di ogni *bias*[59].

Un dettaglio che non può essere assolutamente non considerato è quello socioculturale.

Ho criticato aspramente il metodo maggioritario e ho fatto un'enorme fatica a spiegarmi il motivo per cui è ancora in vigore. Nonostante una prima risposta risieda nella difficoltà oggettiva ad attuare una riforma elettorale, non possiamo non chiederci se gli americani sono davvero interessati a cambiare metodo. Probabilmente no; d'altronde, cosa c'è di più americano del *winner takes all*[60]? La cultura americana valorizza enormemente la competizione e l'individualismo e trovo sia perfettamente rappresentata dal metodo maggioritario in questo.

Un'ultima considerazione che ci tengo a fare parlando dell'America è che siamo abituati a giudicare, spesso anche in maniera pesante, questo paese che conosciamo così poco. O meglio, pensiamo di conoscerlo tramite tutti i media di cui siamo costantemente bombardati. Eppure, andrebbe sempre tenuta a mente l'idea che la rappresentazione che abbiamo in testa si tratta di nulla in più che una mera percezione della realtà, probabilmente affetta da un numero incredibilmente alto di stereotipi e generalizzazioni. Questo non significa che non si può esprimere nessuna idea o critica nei loro confronti, ma con la consapevolezza che potremmo sbagliarci e che il popolo americano potrebbe avere gli stessi dubbi rispetto a molte delle nostre abitudini.

---

58 Chiamati così perché storicamente sono sempre stati democratici, ma ultimamente non è più così sicuro.

59 Un metodo è colpito da *bias* quando presenta una sistematica tendenza a favorire alcuni stati.

60 Formula con cui ci si riferisce al metodo maggioritario americano che prevede che i voti di tutti i Grandi Elettori vengano dati a chi ottiene la maggioranza.

Un ulteriore argomento che è stato citato e meriterebbe maggiore attenzione è quello della manipolazione. Anche in questo senso questa tesi è stata piuttosto pessimista: non esistono sistemi elettorali non manipolabili.

Quando si parla di manipolazione in un contesto politico, bisogna evidenziare quali sono le componenti sulle quali si può agire per indirizzare le persone verso una scelta piuttosto che un'altra. Queste, nel dettaglio, sono il contesto, le politiche e le decisioni in sé.

Una prima forma di manipolazione è quella del contesto: immaginiamo di prevedere una soglia di sbarramento per la trasformazione da preferenze a seggi elettorali. Ovviamente i partiti danneggiati sarebbero quelli piccoli.

Si possono limitare i temi di cui si parla focalizzandosi su quelli che scaldano particolarmente gli animi dei cittadini. O peggio, pronunciare qualcosa di assurdo, a cui probabilmente neanche si crede, solo per attirare l'attenzione. Purché se ne parli.

Qualcosa molto in voga negli ultimi anni, anche perché è un lavoro molto semplificato dall'utilizzo massiccio dei media, riguarda la distorsione di informazioni; che siano informazioni vere, ma di carattere privato o del tutto false. D. Trump e J. Biden sono i più grandi fan di quella che viene chiamata *negative campaigning*, quella strategia elettorale che mira a enfatizzare i difetti dell'avversario politico più che focalizzarsi sui propri punti di forza. Motivo per cui da una parte il presidente in vigore è dipinto dal suo avversario come un vecchio rimbambito -ci tengo a sottolineare che Trump ha solo tre anni e pochi mesi in meno di Biden- e il suo predecessore come un uomo mentalmente malato. Non che mi senta di dare torto a nessuno dei due, ma forse ci sarebbero argomenti più rilevanti su cui discutere.

Ogni nostro aspetto della vita è soggetto alla manipolazione; da come ci vestiamo, alla velocità che siamo obbligati a mantenere mentre guidiamo, fino al momento della spesa in un supermercato.

Esiste però un caso di manipolazione benevola. Ossimoro? Forse.

L'economia comportamentale, attraverso il connubio tra l'economia e la psicologia, ha cercato di avvicinare i modelli economici relativi alle decisioni alla realtà.

La teoria dei *nudging*[61] utilizza i risultati dell'economia comportamentale per indirizzare le persone verso decisioni migliori per loro e per la comunità. In particolare, si basa sull'idea che gli individui hanno una razionalità limitata e quindi sono soggetti a errori sistematici, che, in quanto tali, sono prevedibili ed evitabili. L'esempio classico riguarda tutte quelle campagne che invitano i cittadini a incrementare il risparmio previdenziale.

[61] Nudge - la spinta gentile è un saggio di R. Thaler e C. Sunstein

Il filo conduttore di questa tesi è stato il pessimismo a seguito dei vari risultati degli economisti, motivo per cui voglio finire il lavoro con una nota positiva.

Non esiste un metodo perfetto di aggregare le preferenze individuali. E perché dev'essere per forza una cosa negativa? Questo vuol dire che ogni paese dovrà andare alla ricerca del metodo che meglio si adatta alla propria conformazione e non accettare un metodo solo perché matematicamente il più equo.

La speranza è che nei prossimi decenni questa disciplina non venga abbandonata; che si continui la ricerca di sistemi elettorali nuovi e più efficienti e che questa venga affiancata da uno studio della cultura e delle esigenze del territorio in modo da migliorare sempre più il processo elettorale.

Bibliografia

Alderighi, M., **Appunti delle lezioni di microeconomia**

Arrow, K. J. (1963), **Social Choice and Individual Values**, 2nd edn, New Haven: Yale University Press

Artoni, R. (2015), **Elementi di scienza delle finanze**, Il Mulino

Bacci, S., Chiandotto, S. (2019), **Introduction to Statistical Decision Theory: Utility Theory and Causal Analysis**, Chapman and Hall CRC press

Balinski, M. L., Peyton Young, H. (2001), **Fair representation: meeting the ideal of one man, one vote**, Brookings Institution Press

Bergamini, M., Trifone, A., Barozzi, G. (2020), **Gli insiemi, la logica e le relazioni**, Zanichelli

Bersani, R., Peres, E. (1998), **Matematica: corso di sopravvivenza**, Ponte alle grazie

Browning, E. K., Zupan, M. A. (2019), **Microeconomics: Theory and Applications**, Wiley

Campa, G. (2017), **Economia e finanza pubblica**, UTET Università

Cevolani, G., Colombo, C. (2023), **Il paradosso del prigioniero**, Pelago

Clark, M. (2007), **I paradossi dalla A alla Z**, Raffaello Cortina Editore

Codogno, M. (2017), **La teoria dei giochi**, Corriere della sera

Costa, Francesco (2021), **Questa è l'America**, Mondadori

Craven, J. (1992), **Social choice: a framework for collective decisions and individual judgements**, Cambridge University press

Devlin, K. (2008), **La lettera di Pascal**, RCS Libri S.p.A.

Di Filippo, S. (2023), **Nudge, una spinta poco gentile?**, IBLLibri

Falletta, N. (1983), **Il libro dei paradossi**, Longanesi & C.

Fragapane, S. (2017), **Matematica: i numeri reali**, Corriere della sera

Gibbard, A. (1973), **Manipulation of Voting Schemes: A General Result**, Econometrica: Journal of the econometric society

Joyce, P (2015), **Politics: A Complete Introduction**, Teach Yourself

Kahneman, D., Sibony, O., Sunstein, (2021), **Rumore: Come l'inconsapevolezza dell'irrazionalità porta a decisioni sbagliate**, Milano: Rizzoli

Li Calzi, M. (2023), **Teorema dell'impossibilità di Arrow** vol-14, Le scienze

Lundell, K. (2009), **The Origin of Electoral Systems in the Postwar Era**, Routledge

MacKay, A. F. (1980), **Arrow's theorem, the paradox of social choice: a case study in the philosophy of economics**, Yale University press

Maskin, E., Sen, A. (2014), **The arrow impossibility theorem**, Columbia university press

Medvic, S. K. (2021), **Gerrymandering: The Politics of Redistricting in the United States**, Polity Press

Moreno Verdejo, A., Villegas Escobar, A. M. (2019), **Matemáticas electorales**, Los Libros de La Catarata

Morlino, L., Sorice, M. (2021), **L'illusione della scelta**, Luiss University Press

Nitzan, S. (2010), **Collective Preference and Choice**, Cambridge University Press

Odifreddi, P. (2001), **C'era una volta un paradosso: storie di illusioni e verità rovesciate**, Grandi Tascabili Einaudi

Odifreddi, P. (2018), **La democrazia non esiste**, Rizzoli

Palladino, D. (2023), **I paradossi della democrazia**, Le scienze

Pozzi, F. (2022), **Digital Nudge**, Ledizioni

Reeve, A., Ware, A. (2013) **Electoral Systems**, Routledge

Saracco A., Saracco G. (2020) Matematica, **Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana**, Serie 1, Vol. 5, n.1, p. 17–31

Satterthwaite, M.A. (1975) **The Existence of Strategy-Proof Voting Procedures**, School of Management Northwestern University

Scotto, S. (2023), **Il paradosso di San Pietroburgo**, Pelago

Sen, A. (1970), **Collective Choice and Social Welfare**, Oxford: Basil Blackwell

Stevens, J. B. (1993), **The Economics of Collective Choice**, Westview Press

Szpiro, G. G. (2013), **La matematica della democrazia**, Bollati Boringhieri

Thaler, R., Sunstein, C. (2008), **Nudge - la spinta gentile**, Universale Economia Feltrinelli

Tideman, N. (2006), **Collective decisions and voting**, Ashgate Publishing